

# WYMIAROWANIE SŁUPÓW

## stalowych dwugąłęziowych

dr inż. Robert Studziński  
Politechnika Poznańska  
mgr inż. Paweł Ordziniak  
GammaCAD

W artykule poruszona została kwestia wymiarowania stalowych słupów dwugąłęziowych. Porównane zostały dwa modele obliczeniowe mające zastosowanie przy wymiarowaniu tego rodzaju elementów: model analityczny opisany w PN-EN 1993-1-1 oraz model wykorzystujący analogię ramową.

Stalowe słupy dwugąłkowe składają się z dwóch równoległych pasów połączonych przewiązkami lub skratowaniem typu N, V lub X, gdzie przewiązki i zakratowanie są elementami usztywniającymi. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że przewiązki przenoszą przede wszystkim zginanie, podczas gdy skratowanie przenosi głównie ściskanie i rozciąganie. Skutkuje to tym, że zawarte w normie zasady obliczania i projektowania słupów dwugąłkowych są inne w przypadku słupów z przewiązkami i słupów ze skratowaniem. Przy projektowaniu elementów dwugąłkowych należy pamiętać o ich mniejszej sztywności postaciowej w porównaniu z elementami pełnościennymi. Pomimo tego aspektu stosowanie słupów dwugąłkowych pozwala na znaczne zmniejszenie masy elementu ściskanego oraz na zwiększenie jego sztywności giętej. Pewnym mankamentem wynikającym ze stosowania słupów złożonych są dodatkowe koszty wykonania połączeń i zwiększone koszty zabezpieczeń antykorozyjnych.

Słupy dwugąłkowe często są stosowane w przypadku dużych długości wybowoczeniowych i stosunkowo niedużych sił ściskających. Taka sytuacja występuje np. w przypadku podkonstrukcji dla szklanych ścian kurtynowych i elewacyjnych obciążonych głównie obciążeniem poziomym wynikającym odpowiednio z oddziaływania mas powietrza na skutek różnicy ciśnień lub parcia i ssania wiatru. Schemat statyczny takich słupów złożonych zazwyczaj odpowiada kryteriom stosowalności algorytmu normowego [1, 2], tj. obustronne przegubowe podparcie. Słupy dwugąłkowe stosowane są również w halach przemysłowych z transportem wewnętrznym. W takiej sytuacji obciążenie słupa złożonego stanowią zarówno osiowe siły ściskające (wynikające z oddziaływania suwnic i konstrukcji dachu), jak i siły poziome wynikające z oddziaływania wiatru na halę przemysłową. Słupy te najczęściej są utwierdzone w poziomie fundamentu i przegubowo połączone z dźwigarem (rygłem) dachowym. Taki przypadek wg [1] wymaga „zastosowania odpowiednich modyfikacji” w algorytmie obliczeniowym. Poprawność i zasadność wspomnianych „modyfikacji” zostanie przedstawiona w dalszej części artykułu.

### Metodologie wyznaczania sił wewnętrznych

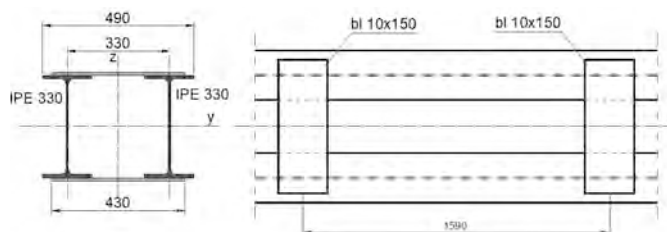
W literaturze przedmiotu metodologia wyznaczania sił wewnętrznych w oparciu o obowiązujące normy projektowe [1] została omówiona m.in. w [3, 4, 5]. W pozycji literaturowej [3] na przykładzie liczbowym pokazano różnice w wymiarowaniu słupów złożonych ze skratowaniem i z przewiązkami. Otrzymane wyniki, przy wykorzystaniu EC3 [1], odniesione zostały do wyników otrzymanych w oparciu o polską normę [2]. Porównania te wykazały, że norma [1] trafniej odzwierciedla pracę słupa złożonego, szczególnie w przypadku słupa z przewiązkami, co pozostaje w sprzeczności z wnioskami [4]. Dodatkowo w przytoczonej pozycji [4] przedstawiono uproszczoną analogię ramową przy wymiarowaniu słupa dwuga-

łęziowego z przewiązkami. Rozbieżności we wnioskach w wspomnianych publikacjach [3, 4] są dodatkowym argumentem ku temu, aby na problem wymiarowania słupa dwugąłkowego spojrzeć ponownie.

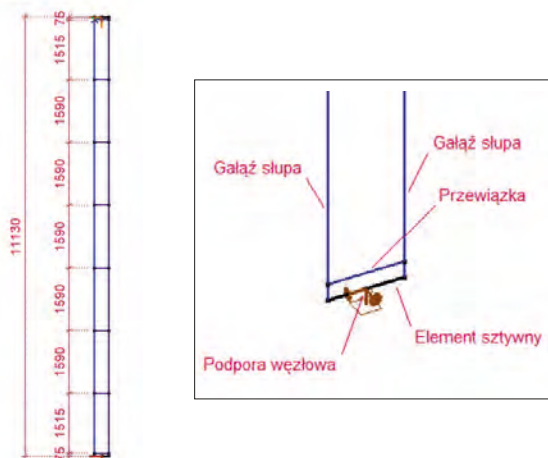
W niniejszym artykule przedstawione zostanie porównanie wyników z pełnej analogii ramowej z podejściem normowym [1]. W tym przypadku przez analogię ramową zakłada się, że słup złożony będzie reprezentowany przez dyskretny układ prętowy. Metoda opisana jako analogia ramowa pozwala w bardzo praktyczny sposób na wyznaczenie rzeczywistych sił i momentów wewnętrznych słupa złożonego w gałęziach (pasach) i elementach usztywniających oraz ich późniejszą weryfikację w programach komputerowych. Intencją autorów jest zwrócenie uwagi na ograniczony zakres stosowania algorytmu normowego [1, 2], tj.: słup obustronnie przegubowo zamocowany, równoległe pasy (gałęzie), stała odległość między przewiązkami/skratowaniem, nieparzysta liczba przedziałów  $n \geq 3$ .

### Przykłady obliczeniowe

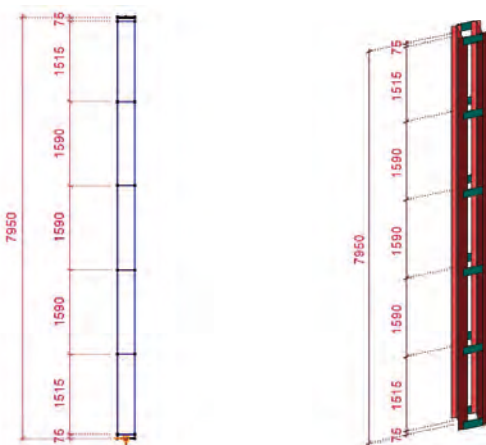
W artykule rozwiązane zostaną dwa przykłady liczbowe stalowego słupa dwugąłkowego z przewiązkami. Pierwszy przypadek dotyczy słupa obustronnie przegubowo zamocowanego obciążonego siłą osiową  $P_1 = 1000$  kN. Drugi przypadek dotyczy słupa wspornikowego obciążonego na jego końcu siłą osiową  $P_2 = 200$  kN i siłą poziomą  $H = 15$  kN. Przyjęto, że słupy wykonane zostały ze stali konstrukcyjnej S235 ( $f_y = 23,5$  kN/cm<sup>2</sup>). Gałęzie słupa wykonane są z IPE 330, o rozstawie osiowym 33 cm, patrz: rys. 1. Wysokość w osiach podpór wynosi  $L_1 = 1113$  cm i  $L_2 = 795$  cm odpowiednio dla pierwszego i drugiego przypadku (patrz rys. 2. i 3.). Osiowy rozstaw przewiązek w obu zadaniach wynosi  $h_0 = 159$  cm. W obliczeniach przyjęto częściowe współczynniki bezpieczeństwa  $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1.0$ . Podstawowe cechy geometryczne przekroju IPE 330 są następujące:  $A = A_{ch} = 62,6$  cm<sup>2</sup>,  $i_y = 13,7$  cm,  $i_z = 3,55$  cm,  $I_z = I_{ch} = 788$  cm<sup>4</sup>,  $W_{el,z} = 98,5$  cm<sup>3</sup>. Rozpatrywany przekrój spełnia warunki dla klasy 2. Przyjęto przewiązki wykonane z płaskownika 10 x 150 x 430 mm:  $A_{b,V} = 15,0$  cm<sup>2</sup>,  $W_b = 37,5$  cm<sup>3</sup>,  $I_b = 281,25$  cm<sup>4</sup>.



Rys. 1. Fragment słupa dwugąłkowego



Rys. 2. Model dyskretny słupa przegubowo zamocowanego i szczegół jego podparcia w programie AxisVM



Rys. 3. Model dyskretny słupa wspornikowego i jego widok 3D zrenderowany w programie AxisVM

Algorytm wymiarowania słupa dwugąłęziowego składa się z kilku etapów. W pierwszej kolejności należy określić cechy geometryczno-wytrzymałościowe przekroju złożonego. Następnie wyznacza się siłę krytyczną dla słupa złożonego. W kolejnym kroku określa się trzy istotne wielkości z punktu widzenia nośności elementu dwugąłęziowego: maksymalną wartość globalnego momentu zginającego, maksymalną wartość siły podłużnej, maksymalną wartość siły poprzecznej. Na koniec przeprowadza się sprawdzenie warunków nośności elementów składowych słupa złożonego. Wymiarowanie słupa dwugąłęziowego przegubowo zamocowanego i wspornikowego zostało przedstawione w tabelach 1. do 4.

Tabela 1. Obliczenie nośności słupa wg PN-EN 1993-1-1 [1] (sprawdzenie nośności przy wyboczeniu względem osi y-y – oś materiałowa)

| Rodzaj zamocowania                                                                                         | przebieg na obu końcach                                                       | wspornik                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Sprawdzenie nośności przy wyboczeniu względem osi y-y – oś materiałowa</b>                              |                                                                               |                                                                                                                                                                 |
| Obciążenie pojedynczej gąsienicy                                                                           | $M_{Ed}^I = 0,0 \text{ kNm}$<br>$N_{Ed}^I = P1/2 = -1000/2 = -500 \text{ kN}$ | $M_{Ed}^I = H \cdot L = 15,7,95 = 119,25 \text{ kNm}^I$<br>$N_{Ed}^I = P1/2 + M_{Ed}^I/h_0 =$<br>$= -200/2 + 119,25/0,33 =$<br>$= +261,36 / -461,36 \text{ kN}$ |
| Długość krytyczna $L_{cr,y}$                                                                               | $L_{cr,y} = 1,0 \cdot L_1 = 1,0 \cdot 11,13 = 11,13 \text{ m}$                | $L_{cr,y} = 2,0 \cdot L_2 = 2,0 \cdot 7,95 = 15,9 \text{ m}$                                                                                                    |
| Smukłość względna<br>$\bar{\lambda}_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} \cdot \frac{1}{\lambda_1}$                    | $\bar{\lambda}_y = \frac{1113}{13,7} \cdot \frac{1}{93,9} = 0,87$             | $\bar{\lambda}_y = \frac{1590}{13,7} \cdot \frac{1}{93,9} = 1,24$                                                                                               |
| Współczynnik wybozeniowy $\chi_y$                                                                          | $\chi_y = 0,75$                                                               | $\chi_y = 0,50$                                                                                                                                                 |
| Warunek nośności wg [1], wzór (6.47),<br>$N_{b,Rd} = \frac{\chi_y \cdot A_{sR} \cdot f_{yk}}{\gamma_{M1}}$ | $N_{b,Rd} = \frac{0,75 \cdot 62,6 \cdot 23,5}{1,0} = 1103,33 \text{ kN}$      | $N_{b,Rd} = \frac{0,50 \cdot 62,6 \cdot 23,5}{1,0} = 735,55 \text{ kN}$                                                                                         |
| Warunek 1: $N_{Ed}/N_{b,Rd}$                                                                               | $500/1103,33 = 0,45 \text{ OK}$                                               | $461,36/735,55 = 0,63 \text{ OK}$                                                                                                                               |

<sup>a)</sup> wartość momentu wyznaczona jak dla jednogłęziowego elementu wspornikowego w celu oszacowania siły wewnętrznej w pojedynczej gęzi słupa dwugłęziowego

**NOWA WERSJA JUŻ DOSTĘPNA**

# AxisVM x4

*Program  
do analiz  
i wymiarowania  
konstrukcji  
budowlanych*

- **GOTOWY NA BIM**
- **LICENCJA WIECZYSTA**
- **ZAAWANSOWANE  
MOŻLIWOŚCI**
- **WYMIAROWANIE WG PN-EN**

**GammaCAD** sp. z o.o.

**A:** Romana Maya 1/102, 61-371 Poznań

**T:** 61 307 16 33

**E:** [biuro@gammacad.pl](mailto:biuro@gammacad.pl)

[www.gammacad.pl](http://www.gammacad.pl)

Tabela 2. Obliczenie nośności słupa wg PN-EN 1993-1-1 [1] (sprawdzenie nośności przy wyboczeniu względem osi z-z – oś niemateriałowa)

| Rodzaj zamocowania                                                                                                                                                                                                | przegub na obu końcach                                                                                                                                                                                                  | wspornik                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Sprawdzenie nośności przy wyboczeniu względem osi z-z – oś niemateriałowa</b>                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                           |
| Moment i promień bezładności słupa względem osi z-z, por. [1], tab. 6.8<br>$I_z = 0,5 h_0^3 A_{ch} + 2 I_{ch}$ , $i_0 = \sqrt{\frac{I_z}{2 A_{ch}}}$                                                              | $I_z = 0,5 \cdot 33^3 \cdot 62,6 + 2 \cdot 788 = 35661,7 \text{ cm}^4$<br>$i_0 = \sqrt{\frac{35661,7}{2 \cdot 62,6}} = 16,88 \text{ cm}$                                                                                |                                                                                                                                                           |
| Smukłość wokół osi z-z, por. [1], tab. 6.8<br>$\lambda = \frac{L_{cr,z}}{i_0}$                                                                                                                                    | $\lambda = \frac{1,0 \cdot 1113}{16,88} = 65,94$                                                                                                                                                                        | $\lambda = \frac{2,0 \cdot 795}{16,88} = 94,19$                                                                                                           |
| Parametr $\mu$ , por. [1], tab. 6.8<br>Zastępczy moment bezładności wg [1], wzór (6.74)<br>$I_{eff} = 0,5 h_0^3 A_{ch} + 2 \mu I_{ch}$                                                                            | $\mu = 1,0$<br>$I_{eff} = I_z = 35661,7 \text{ cm}^4$                                                                                                                                                                   | $\mu = 2,0 - 94,19/75 = 0,74$<br>$I_{eff} = 0,5 \cdot 33^3 \cdot 62,6 + 2 \cdot 0,74 \cdot 788 = 35251,94 \text{ cm}^4$                                   |
| Szywność postaciowa słupa wg [1], wzór (6.73)<br>$S_v = \frac{24 E I_{ch}}{a^2 \left( 1 + \frac{2 I_{ch} h_0}{n I_b a} \right)}$                                                                                  | $S_v = \frac{24 \cdot 21000 \cdot 788}{159^2 \left( 1 + \frac{2 \cdot 788 \cdot 33}{2 \cdot 281,25 \cdot 159} \right)} = 9933,29 \text{ kN}$<br>wartość mniejszą niż $2 \pi^2 E I_{ch} a^{-2} = 12920,55 \text{ kN OK}$ |                                                                                                                                                           |
| Sila krytyczna elementu złożonego<br>$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{eff}}{L_{cr,z}^2}$                                                                                                                                | $N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 35661,7}{1113^2} = 5966,65 \text{ kN}$                                                                                                                                          | $N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 35251,94}{1590^2} = 2890,07 \text{ kN}$                                                                           |
| Wstępna imperfekcja wg [1], punkt 6.4.1(1), $e_0$<br>Maksymalny obliczeniowy moment zginający słupa wg [1], wzór (6.69)<br>$M_{Ed} = \frac{N_{Ed} e_0 + M'_{Ed}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}}$ | $e_0 = 1113/500 = 2,23 \text{ cm}$<br>$M_{Ed} = \frac{1000 \cdot 2,23 + 0}{1 - \frac{1000}{5966,65} - \frac{1000}{9933,29}} = 3047,57 \text{ kNcm}$                                                                     | $e_0 = 1590/500 = 3,18 \text{ cm}$<br>$M_{Ed} = \frac{200 \cdot 3,18 + 11925}{1 - \frac{200}{2890,07} - \frac{9933,29}{9933,29}} = 13793,25 \text{ kNcm}$ |
| Obliczeniowa siła w pasie wg [1], wzór (6.69)<br>$N_{ch,Ed} = 0,5 N_{Ed} + \frac{M_{Ed} h_0 A_{ch}}{2 I_{eff}}$                                                                                                   | $N_{ch,Ed} = 0,5 \cdot 1000 + \frac{3047,57 \cdot 33 \cdot 62,6}{2 \cdot 35661,7} = 588,27 \text{ kN}$                                                                                                                  | $N_{ch,Ed} = 0,5 \cdot 200 + \frac{13793,25 \cdot 33 \cdot 62,6}{2 \cdot 35251,94} = 504,15 \text{ kN}$                                                   |
| Obliczeniowa siła poprzeczna w słupie wg [1], wzór (6.70)<br>$V_{Ed} = \pi \frac{M_{Ed}}{L}$                                                                                                                      | $V_{Ed} = \pi \frac{3047,57}{1113} = 8,60 \text{ kN}$                                                                                                                                                                   | $V_{Ed} = \max \left\{ \begin{matrix} -H_{Ed} \\ -H_{Ed} + \frac{\pi}{2L} N_{Ed} e_0 \end{matrix} \right\} = 15 \text{ kN}$                               |

\* w przypadku słupa wspornikowego nie można zastosować wzoru z [1] gdyż prowadzi to do absurdalnych wyników, szczegóły w tekście

Tabela 3. Sprawdzenie nośności pojedynczego pasa na ściskanie i zginanie wg [1], rys 6.11 (oś niemateriałowa)

| Rodzaj zamocowania                                                                                                                | przegub na obu końcach                                                                                                                                                                      | wspornik                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Sprawdzenie nośności pojedynczego pasa na ściskanie i zginanie (oś niemateriałowa)</b>                                         |                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                  |
| Obliczeniowa siła podłużna w pasie $N_{ch,Ed}$                                                                                    | $N_{ch,Ed} = 588,27 \text{ kN}$                                                                                                                                                             | $N_{ch,Ed} = 504,15 \text{ kN}$                                                                                                                                  |
| Obliczeniowy moment zginający w pasie $M_{ch,Ed} = \frac{V_{Ed} a}{2}$                                                            | $M_{ch,Ed} = \frac{8,60 \cdot 159,0}{2} = 341,85 \text{ kNcm}$                                                                                                                              | $M_{ch,Ed} = \frac{15 \cdot 159,0}{2} = 596,25 \text{ kNcm}$                                                                                                     |
| Obliczeniowa siła ścinająca w jednym pasie $V_{ch,Ed} = 0,5 V_{Ed}$                                                               | $V_{ch,Ed} = 0,5 \cdot 8,60 = 4,30 \text{ kN}$                                                                                                                                              | $V_{ch,Ed} = 0,5 \cdot 15 = 7,5 \text{ kN}$                                                                                                                      |
| Nośność przekroju na ściskanie<br>$V_{pl,Ed} = \frac{2 b t_f f_{ty}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}$                                       | $V_{pl,Ed} = \frac{2 \cdot 16,0 \cdot 1,15 \cdot 23,5}{\sqrt{3} \cdot 1,0} = 499,29 \text{ kN}$                                                                                             |                                                                                                                                                                  |
| Warunek: $V_{Ed} / N_{ch,Ed}$                                                                                                     | $4,30/499,29 = 0,009 < 0,5 \text{ OK}$                                                                                                                                                      | $7,5/499,29 = 0,015 < 0,5 \text{ OK}$                                                                                                                            |
| Smukłość pojedynczego pasa przy wyboczeniu w płaszczyźnie słupa<br>$\bar{\lambda}_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{1}{\lambda_z}$ | $\bar{\lambda}_z = \frac{159,0}{3,55 \cdot 93,9} = 0,48$                                                                                                                                    | $\alpha = 0,34 \quad \phi_z = 0,66 \quad \chi_z = 0,90$                                                                                                          |
| Nośności przekroju gałęzi słupa<br>$N_{Rk} = A_{sk} f_y \quad M_{Rk} = W_{pl,z} f_y$                                              | $N_{Rk} = 62,6 \cdot 23,5 = 1471,1 \text{ kN} \quad M_{Rk} = 98,5 \cdot 23,5 = 2314,75 \text{ kNcm}$                                                                                        |                                                                                                                                                                  |
| $k_{zz} = C_{zz} \left[ 1 + (2\bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{ch,Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$                       | $\alpha_{bz} = 0 \quad \psi = 0$<br>$C_{zz} = 0,95 + 0,05 \alpha_{bz} = 0,95$<br>$k_{zz} = 1,10$<br>$\leq 0,95 \left( 1 + 0,6 \frac{N_{ch,Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) = 1,20$ | $\psi = 0,84 \quad C_{zz} = 0,6 + 0,4 \psi = 0,94$<br>$k_{zz} = 1,09$<br>$\leq 0,94 \left( 1 + 0,6 \frac{N_{ch,Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) = 1,19$ |
| Warunek nośności<br>$\frac{N_{ch,Ed}}{\chi_z N_{Rk}} + k_{zz} \frac{M_{ch,Ed}}{M_{Rk}} \leq \frac{1}{\gamma_{M1}}$                | $\frac{588,27}{0,90 \cdot 1471,1} + 1,1 \frac{341,85}{2314,75} = \frac{1,0}{1,0} = 0,61 < 1,0$<br>OK                                                                                        | $\frac{504,15}{0,90 \cdot 1471,1} + 1,09 \frac{596,25}{2314,75} = \frac{1,0}{1,0} = 0,66 < 1,0$<br>OK                                                            |

Tabela 4. Sprawdzenie nośności przewiązki

| Rodzaj zamocowania                                                                  | przegub na obu końcach                                                                                             | wspornik                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Sprawdzenie nośności przewiązki</b>                                              |                                                                                                                    |                                                                                                                |
| Obciążenie<br>$V_{Ed,b} = V_{Ed} \frac{a}{h_b} \quad M_{Ed,b} = V_{Ed} \frac{a}{2}$ | $V_{Ed,b} = 8,60 \frac{159,0}{33,0} = 41,44 \text{ kN}$<br>$M_{Ed,b} = 8,60 \frac{159,0}{2} = 683,70 \text{ kNcm}$ | $V_{Ed,b} = 15 \frac{159,0}{33,0} = 72,27 \text{ kN}$<br>$M_{Ed,b} = 15 \frac{159,0}{2} = 1192,5 \text{ kNcm}$ |
| Warunek nośności:<br>Nośność na ścinanie $V_{pl,bd}$                                | $V_{pl,bd} = 1,0 \cdot 15,0 \cdot 23,5 / \sqrt{3} = 203,52 \text{ kN}$<br>$41,44/203,52 = 0,20 \text{ OK}$         | $V_{pl,bd} = 1,0 \cdot 15,0 \cdot 23,5 / \sqrt{3} = 203,52 \text{ kN}$<br>$72,27/203,52 = 0,36 \text{ OK}$     |
| Warunek nośności:<br>Nośność na zginanie $M_{c,bd}$                                 | $M_{c,bd} = 37,5 \cdot 23,5 = 881,25 \text{ kNcm}$<br>$683,70/881,25 = 0,78 \text{ OK}$                            | $M_{c,bd} = 37,5 \cdot 23,5 = 881,25 \text{ kNcm}$<br>$1192,5/881,25 = 1,35 \text{ PRZEKROCZONA}$              |

Poniżej przedstawiono propozycję modyfikacji algorytmu normowego [1] ze względu na inne niż normowe warunki brzegowe, tj. słup wspornikowy. Oprócz oczywistego aspektu, jakim jest dostosowanie współczynnika długości wybocheniowej do schematu statycznego, należy również przyjąć poprawną funkcję linii ugięcia słupa spowodowaną imperfekcją łukową  $e_0$ . W przypadku słupa wspornikowego linia ugięcia  $w(x)$  przyjmuje postać (1)

$$w(x) = e_0 \sin \frac{\pi x}{2L_2} \quad (1)$$

Funkcja momentu zginającego  $M_{Ed}(x)$  słupa wspornikowego obciążonego siłą poziomą  $H = H_{Ed}$  oraz imperfekcją łukową przyjmuje postać (2)

$$M_{Ed}(x) = (L_2 - x) H_{Ed} + N_{Ed} e_0 \sin \frac{\pi x}{2L_2} \quad (2)$$

stąd funkcja siły poprzecznej  $V_{Ed}(x)$  będzie opisana wyrażeniem (3)

$$V_{Ed}(x) = \frac{dM_{Ed}(x)}{dx} = -H_{Ed} + \frac{\pi}{2L_2} N_{Ed} e_0 \cos \frac{\pi x}{2L_2} \quad (3)$$

W przedstawionym wyprowadzeniu przyjęto, że początek układu współrzędnych będzie znajdował się w utwierdzeniu słupa.

## Analogia ramowa

Model w oparciu o analogię ramową przygotowano w programie obliczeniowym AxisVM. Model numeryczny słupa składa się z elementów prętowych (pasy słupa, przewiązki) oraz z elementów sztywnych. Podejście ramowe wymaga wymodelowania każdej gałęzi i przewiązek jako odrębnych elementów prętowych (patrz: rys. 2 i 3). Ponieważ wszystkie pręty składowe słupa zostały wymodelowane w jednej płaszczyźnie, konieczne jest przypisanie do pręta przewiązki profilu złożonego z dwóch rozsuniętych prostokątów  $2 \cdot 10 \times 150$ . Gałęzie w węzłach skrajnych, zarówno na dole, jak i na górze słupa, zostały połączone za pomocą tzw. elementów sztywnych, odwzorowujących blachy poziome. Na środku tych elementów umieszczono dodatkowy węzeł, który umożliwia osiowe przyłożenie obciążenia skupionego oraz przypisania podpory węzłowej z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

W celu uwzględnienia normowej imperfekcji łukowej  $e_0$  wprowadzono poziome równoważne obciążenie liniowe  $q_d = 8 \cdot N_{Ed} \cdot e_{0,d} \cdot L^{-2}$ , (por. [1] rys. 5.4). Ostateczną wielkość obciążenia  $q_d$  ustalono iteracyjnie, stosując się do wytycznych wprowadzania imperfekcji w analizie stężeń pkt. 5.3.3 [1]. Wyznaczone obciążenie ( $q_d = 1,93 \text{ kN/m}$  dla obustronnego podparcia przegubowego i  $q_d = 0,5 \text{ kN/m}$  dla wspornika) rozłożono na obie gałęzie słupa. Proszę zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku schematu wspornikowego brak w normie [1] informacji o sposobie przykładania obciążenia równoważnego. Stąd, na potrzeby zdefiniowanego zadania, autorzy zastosowali analogię i otrzymano  $q_d = 2 \cdot N_{Ed} \cdot e_{0,d} \cdot L^{-2}$ .

Porównanie wyników otrzymanych z analizy statycznej modelu dyskretnego i z analizy według algorytmu normowego [1] przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Zestawienie wyników analogii ramowej z wynikami algorytmu normowego [1]

| Słup:                                             | przegub na obu końcach | wspornikowy |           |         |
|---------------------------------------------------|------------------------|-------------|-----------|---------|
| Model:                                            | dyskretny              | normowy     | dyskretny | normowy |
| <b>Siły wewnętrzne w pasie (pojedyncza gałąź)</b> |                        |             |           |         |
| $N_{ch,Ed}$ [kN] (max)                            | 585,76                 | 588,27      | 507,32    | 504,15  |
| $M_{ch,Ed}$ [kNcm]                                | 365,2                  | 341,85      | 1191,50   | 596,25  |
| $V_{ch,Ed}$ [kN]                                  | 5,40                   | 4,30        | 11,48     | 7,50    |
| <b>Siły wewnętrzne w przewiązce</b>               |                        |             |           |         |
| $V_{Ed,b}$ [kN]                                   | 16,45                  | 41,44       | 46,34     | 72,27   |
| $M_{Ed,b}$ [kNcm]                                 | 271,40                 | 683,70      | 764,70    | 1192,50 |

Przy weryfikacji sił wewnętrznych modelu dyskretnego w programie komputerowym należy zwrócić uwagę na fakt, że parametry wymiarujące są przypisywane do każdego pręta osobno, a nie do słupa jako całości. I tak wokół osi materiałowej ( $y$ ) gałęzi słupa przyjmujemy jego całkowitą długość wybocheniową, natomiast wokół osi niemateriałowej dłu-



gość wybocheniowa to odległość pomiędzy przewiązkami. Analiza zwichrzenia dla gałęzi słupa jest pomijana i należy ją wyłączyć. Dla przewiązek z oczywistych powodów pomijane są parametry związane ze zwichrzeniem i wybocheniem.

Pomimo zastosowanych odpowiednich dla słupa wspornikowego modyfikacji różnica między modelem dyskretnym a podejściem normowym jest istotna. Model normowy zawyża wartości sił występujących w przewiązkach, zaniżając jednocześnie wartość momentu zginającego przypadającego na pojedynczą gałąź.

## Podsumowanie

W przypadku słupa przegubowo zamocowanego siły wewnętrzne w pojedynczej gałęzi wyznaczone za pomocą algorytmu normowego [1] są zgodne z siłami wyznaczonymi w modelu dyskretnym, natomiast siły wewnętrzne w przewiązkach różnią się od siebie. W tym przypadku okazuje się, że model normowy zawyża wielkość obciążenia, jakie przypada na przewiązki. Z punktu widzenia niezawodności słupa dwugałęziowego przegubowo zamocowanego zastosowanie modelu normowego [1] skutkuje jedynie przewymiarowaniem przewiązek i spoin łączących przewiązki z pasami słupa. Odm inną sytuację zaobserwowano w przypadku słupa dwugałęziowego wspornikowego. Norma [1] dopuszcza stosowanie algorytmu normowego do innych warunków podparcia niż przegubowe obustronne podparcie, mówiąc jedynie o zastosowaniu „odpowiednich modyfikacji”. Autorzy opracowania, rozwiązując analitycznie słup wspornikowy, zastosowali odpowiednie modyfikacje (odpowiednia długość wybocheniowa, uwzględnienie imperfekcji tuckowej). Pomimo to model normowy zawyża wartości sił występujących w przewiązkach oraz zaniża wartość momentu zginającego przypadającego

jącego na pojedynczą gałąź. Autorzy artykułu odradzają stosowanie algorytmu normowego w sytuacjach innych niż obustronne przegubowe podparcie. W przypadku „innych” warunków brzegowych zaleca się stosowanie dyskretnych modeli prętowych, tym bardziej, że z praktycznego punktu widzenia wymiarowanie tych modeli w programie komputerowym nie nastręcza dodatkowych trudności. ■

## Bibliografia

- [1] PN-EN 1993-1-1:2006, Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych -- Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [2] PN-B-03200:1990, Konstrukcje stalowe -- Obliczenia statyczne i projektowanie.
- [3] Pałkowski Sz., Wołosik K., Obliczanie słupów stalowych według norm PN-90/B-03200 oraz PN-EN 1993-1-1, s. 133-138, „Inżynieria i Budownictwo” 3/2007.
- [4] Grochowska E., Matysiak A., Konstrukcje stalowe ze słupami dwugałęziowymi z przewiązkami wg norm PN i EN, s. 41-45, „Przegląd Budowlany” 9/2014.
- [5] Giżejowski M., Król P., Ślęczka L., Projektowanie elementów rozciąganych i ściskanych osiowo według PN-EN 1993-1-1 i PN-EN 1993-1-5, s. 126-134, „Inżynieria i Budownictwo” 3/2008.

**Abstrakt:** W artykule poruszona została kwestia wymiarowania stalowych słupów dwugałęziowych. Porównane zostały dwa modele obliczeniowe mające zastosowanie przy wymiarowaniu słupów dwugałęziowych: model analityczny opisany w PN-EN 1993-1-1 oraz model wykorzystujący analogię ramową. Dla każdego wspomnianego modelu rozwiązane zostały dwa przypadki podparcia: słup obustronnie przegubowo zamocowany i słup wspornikowy. Obliczenia statyczne i wymiarowanie dla modelu ramowego słupa zostały przeprowadzone w programie AxisVM. Przedstawione w artykule przykłady liczbowe uwypuklają ograniczenia stosowności algorytmu normowego.

**Słowa kluczowe:** stalowy element ściskany, element dwugałęziowy, imperfekcje, wymiarowanie wg Eurokodu 3

REKLAMA

## XV KONGRES POLSKIEJ IZBY KONSTRUKCJI STALOWYCH



## ZAPROSZENIE

Polska Izba Konstrukcji Stalowych  
zaprasza

w dniach 10–11 października 2017 r.  
do Centrum Konferencyjnego Holiday Inn,  
Warszawa – Józefów, ul. Telimeny 1

## KONGRES

pt. „EKSPANSJA ZAGRANICZNA PRZEDSIĘBIORSTW  
POLSKIEJ BRANŻY KONSTRUKCJI STALOWYCH  
NA RYNEK NIEMIECKI I SKANDYNAWSKI”

Partner Kongresu



Patronat medialny



## Program Kongresu PIKS

### 10.10.2017 r. (wtorek)

- 10<sup>00</sup>–10<sup>45</sup> ■ Rejestracja uczestników  
11<sup>00</sup>–11<sup>10</sup> ■ Otwarcie Kongresu  
11<sup>10</sup>–11<sup>40</sup> ■ „Rynki Europy niemieckojęzycznej – szanse i zagrożenia dla rozwoju przedsiębiorstw zajmujących się produkcją i montażem konstrukcji stalowych”  
– Daniel Widawski – Dyrektor Biura Technicznego w Niemczech – Mostostal Puławy S.A.  
11<sup>40</sup>–12<sup>10</sup> ■ „Perspektywy rozwoju polskiej branży konstrukcji stalowych na rynku skandynawskim – diabeł tkwi w szczegółach”  
– Jerzy Świeca – Wiceprezes, Dyrektor ds. marketingu i produkcji – Mostostal Puławy S.A.  
12<sup>10</sup>–12<sup>40</sup> ■ „Jak odnieść sukces na rynku skandynawskim. Szanse, zagrożenia, strategie rynkowe”  
– Ténne Carlsson – The Swedish Institute of Steel Construction – Lecor Stålteknik AB  
12<sup>40</sup>–13<sup>10</sup> ■ „Skuteczne rozwiązania w zakresie zarządzania ryzykiem i ubezpieczeń w eksporcie”  
– Robert Michalski, Tomasz Rychlewski – Marsh sp. z o.o.  
13<sup>10</sup>–13<sup>40</sup> ■ „Jak osiągać cele biznesowe na styku różnic kulturowych”  
– dr Irena Kamińska-Radomska – The Protocol School of Poland  
13<sup>40</sup>–13<sup>50</sup> ■ „Portal [www.polishsteelwork.com](http://www.polishsteelwork.com) – innowacyjne narzędzie promocji eksportu polskiej branży konstrukcji stalowych”  
– Bartłomiej Baudler  
13<sup>50</sup>–14<sup>05</sup> ■ Przerwa kawowa  
14<sup>05</sup>–14<sup>35</sup> ■ „Jak skutecznie działać na rynku niemieckim i skandynawskim – kodeks najlepszych praktyk branży konstrukcji stalowych”  
Panel dyskusyjny I: Rynek niemiecki  
• Zbigniew Barłóg – Prezes – METALBARK sp. z o.o. sp.k.  
• Bogdan Bawiec – Prezes – ŚFUP sp. z o.o.  
• Jan Jaszczyski – Prezes – JAKOSTA Biuro Inżynierskie  
• Stanisław Sroka – Prezes – TRANSSYSTEM S.A. sp.k.  
• Daniel Widawski – Dyrektor – MOSTOSTAL PUŁAWY S.A.  
14<sup>35</sup>–15<sup>05</sup> ■ Panel dyskusyjny II: Rynek skandynawski  
• Jerzy Kosior – Dyrektor – JOTUN POLSKA sp. z o.o.  
• Ryszard Matyka – Prezes – VISTAL GDYNIA S.A.  
• Józef Popławski – Prezes – MOSTOSTAL POMORZE S.A.  
• Maciej Poprawski – MARSH sp. z o.o.  
• Jerzy Świeca – Dyrektor – MOSTOSTAL PUŁAWY S.A.  
15<sup>05</sup>–15<sup>50</sup> ■ „Polska w strefie Euro? Za i przeciw”  
– prof. Dariusz Rosati – poseł do Parlamentu Europejskiego  
15<sup>50</sup>–16<sup>00</sup> ■ Podsumowanie i zakończenie  
16<sup>00</sup> ■ Obiad  
20<sup>00</sup> ■ Uroczysta Gala – Sponsor Gali – Polskie Towarzystwo Cynkownicze
- 11.10.2017 r. (środa)  
8<sup>00</sup>–9<sup>00</sup> ■ Śniadanie  
9<sup>30</sup>–10<sup>30</sup> ■ Wyjazd

Organizator zastrzega sobie możliwość zmiany programu Kongresu