

dr inż. Robert Studziński^{1*)}
mgr inż. Paweł Ordziński²⁾

Wyznaczenie sprężystego momentu krytycznego dla dowolnych przekrojów otwartych i zamkniętych

Determination of the elastic critical bending moment for any open and closed cross-sections

DOI: 10.15199/33.2015.09.49

Streszczenie. Artykuł przedstawia problem określania sprężystego momentu krytycznego (M_{cr}) dla stalowych przekrojów otwartych i zamkniętych. Omówiono wpływ podparcia bocznego i poziomu przyłożenia obciążenia na wielkość M_{cr} . Ponadto porównano podejście analityczne oraz metodę elementów skończonych do wyznaczania M_{cr} . Wszystkie obliczenia wykonano w programie AxisVM.

Słowa kluczowe: zwichrzenie, sprężysty moment krytyczny, Eurokod 3, analiza MES.

Abstract. The paper deals with the determination of the elastic critical bending moment (M_{cr}) of open and closed steel cross-sections. The influence of the lateral restraint and the position of the applied load was considered. Moreover, the analytically obtained M_{cr} values were compared with FE solutions. All calculations were performed in AxisVM software.

Keywords: lateral torsional buckling, elastic critical bending moment, Eurocod 3, FE analysis.

Przemysłowe belki stalowe to podstawowe elementy wielu nowoczesnych konstrukcji szkieletowych. Charakteryzują się dużą nośnością w stosunku do ich masy, wykazując jednocześnie dużą wrażliwość na lokalną i/lub globalną utratę stateczności związaną z osiągnięciem przez analizowany element obciążenia i stanów krytycznych, z którymi związane są gwałtowne zmiany postaci deformacji [1, 2]. Kinematyka tego zjawiska, w przypadku a) b) obciążonej równomiernie belki dwuteowej i ceowej podpartej widełkowo, została przedstawiona na rysunku 1.

W artykule omówiono problemy utraty stateczności (zwichrzenia) otwartych i zamkniętych przekrojów stalowych poddanych jednokierunkowemu zginaniu. Rozważano elementy nieusztynione i usztynione z płaszczyzny zginania.

Sformułowanie problemu

W praktyce projektowej rozwiązanie problemu zwichrzenia sprowadza się do określenia przez projektanta sprężystego momentu krytycznego M_{cr} odpowiadającego najmniejszej wartości momentu zginającego powodującego utratę stateczności elementu. Wielkość M_{cr} zależy bezpośrednio od: właściwości materiału (E – moduł Younga, G – moduł Kirchhoffa); geometrii przekroju (I_t – moment bezwładności przy skręcaniu, I_ω – wycinkowy mo-

ment bezwładności, I_z – moment bezwładności względem słabszej osi oraz smukłości przekroju); geometrii belki (L – rozpiętość belki między punktami podparcia bocznego, warunków brzegowych i usztynień z płaszczyzny) oraz typu obciążenia i związanego z nim rozkładu momentu zginającego na długości belki.

Na podstawie klasycznej teorii sprężystości podano w literaturze [1, 2, 3] zamknięte wzory definiujące sprężysty moment krytyczny M_{cr} . Zakres ich stosowania jest jednak ograniczony do kilku podstawowych przypadków podparcia i obciążenia. Uwzględniając nomenklaturę wykorzystaną w [5, 6], gdzie oś x to oś pręta, a osie y i z są odpowiednio główną i słabszą osią przekroju, równanie różniczkowe opisujące zwichrzenie przyjmuje postać:

$$EI_\omega \frac{d^4\phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{1}{EI_z} (M_y^2\phi - M_y M_z) = 0 \quad (1)$$

gdzie:

M_y i M_z – momenty zginające wokół osi y i z ;
 ϕ – kąt skręcenia.

Ścisłe rozwiązanie równania (1) podane jest w przypadku czystego zginania belki bisymetrycznej, podpartej widełkowo na obu końcach (2) [6]:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \sqrt{\frac{I_\omega + L^2 GI_t}{I_z} + \frac{L^2 EI_z}{\pi^2 EJ_z}} \quad (2)$$

Uogólnienie zależności (2) zgodnie z normą [6] odbywa się przez wprowadzenie parametrów C_1 , C_2 , k , k_w i z_g , do wzoru (3):

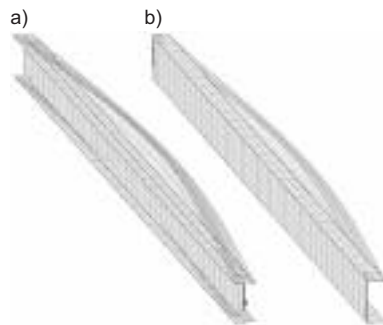
$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left(\sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_\omega + (kL)^2 GI_t}{I_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right) \quad (3)$$

gdzie:

z_g – odległość od punktu przyłożenia obciążenia do środka ścinania przekroju;

C_1 i C_2 – współczynniki zależne od sposobu przyłożenia obciążenia oraz rozkładu i stopnia wypełnienia belki momentem zginającym;

k i k_w – współczynniki długości wyboyceniowej uwzględniające odpowiednio możliwość obrotu belki w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny zginania oraz możliwość deplanacji przekrojów końcowych.



Rys. 1. Kinematyka utraty stateczności belki zginanej (powłokowy model z programu AxisVM): a) dwuteownik; b) ceownik

Fig. 1. The post-buckling cross-section deformations of a beam in bending (shell model obtained in AxisVM software): a) I-section; b) channel section

¹⁾ Politechnika Poznańska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska

²⁾ GammaCAD

^{*)} Autor do korespondencji: robert.studzinski@put.poznan.pl

Zgodnie z wzorem (3) wpływ wypełnienia belki momentem zginającym jest rozpatrywany jako równoważny współczynnik stałego momentu (ang. equivalent uniform moment factor, EUMF) [4], podczas gdy uwzględnienie innych warunków niż swobodne podparcie definiowane jest przez parametry k i k_w . Prezentowane podejście normowe [5, 6] traktuje wpływ wypełnienia belki momentem zginającym (C_1, C_2) oraz warunków brzegowych (k, k_w) jako niesprężony. Rozprężenie tych dwóch parametrów w opisie sprężystego momentu krytycznego M_{cr} prowadzi w wielu przypadkach do błędnego określenia jego wartości [4].

Naszym zdaniem w przypadku konieczności określenia sprężystego momentu krytycznego:

- dla sytuacji wykraczających poza standardowe warunki podparcia i obciążenia;
- dla elementów o przekroju mono- i niesymetrycznym;
- dla elementów o zmiennej sztywności

wymagane jest wykorzystanie metody elementów skończonych. Właściwe zdefiniowanie zadania metodą elementów skończonych pozwoli uniknąć zaniżenia lub zawyżenia wartości M_{cr} .

W artykule przedstawimy przykłady obliczeń wykonane w węgierskim programie do analiz i wymiarowania konstrukcji o nazwie AxisVM, który w spolszczonej wersji dystrybuowany jest przez firmę GammaCAD.

Program AxisVM umożliwia wykonanie szczegółowej analizy wyboczeniowej dowolnego elementu prętowego (a także grupy elementów) po uprzednim, automatycznym przekonwertowaniu go na element powłokowy. Wynikiem analizy wyboczeniowej jest zadana liczba postaci wyboczenia z przyporządkowanymi wartościami α_{cr} . Należy pamiętać, że miarodajne wyniki analizy uzyskamy, siatkując elementy powłokowe. Wystarczająco dokładne wyniki w AxisVM uzyskano już w przypadku siatki wielkości 0,1 m.

Przykład obliczeniowy

Ilustracją wykorzystania elementów prętowych i powłokowych w programie AxisVM, do wyznaczenia sprężystego momentu krytycznego, będą różne warianty belki podpartej widełkowo i obciążonej równomiernie. W przypadku elementów prętowych, M_{cr} wyznaczony zostanie wg wzoru (3), przy czym wartości współczynnika C_1 przyjęte zostaną wg „ulepszonych”, w stosunku do ENV [6], przybliżeń podanych przez Lopeza [4]. Z kolei w przypadku elementów powłokowych została przeprowadzona analiza wyboczeniowa powłokowego elementu przestrzennego o siatce wielkości 0,05 m. Na podstawie otrzymanego mnożnika obciążenia krytycznego α_{cr} , moment sprężysty wyznaczono wg zależności (4).

$$M_{cr} = \alpha_{cr} \cdot M_{Ed} \quad (4)$$

gdzie:

M_{Ed} – obliczeniowy moment zginający.

Rozpatrywano trzy poziomy przyłożenia obciążenia (górną, środkową i spodnią belki), trzy przekroje otwarte (IPE 180, CE 180, 1/2 IPE 180) i jeden przekrój zamknięty (RHS 160 x 80 x 5). Analizowano wpływ punktowego usztywnienia bocznego umiejscowionego w środku rozpiętości elementu bez usztywnienia, z usztywnieniem w poziomie pasa ściskanego lub w poziomie pasa rozciąganego. Wyniki analiz przedstawiono w tabeli. Porównano wartości sprężystego momentu krytycznego otrzymanego wg wzoru (3) w przypadku modelu prętowego i wg wzoru (4) w przypadku modelu powłokowego. Dodatkowo wartości otrzymane w programie AxisVM dla modelu powłokowego zestawiono z wartościami otrzy-

Porównanie wartości otrzymanych M_{cr} dla przypadku przyłożenia obciążenia do pasa górnego

Comparison of the M_{cr} for load applied at the upper flange

Lp.	Nazwa przekroju	L [m]	q [kN/m]	M_{cr} wg (3) [kNm]	AxisVM			LTBeam M_{cr} wg (4) [kNm]
					M_{Ed} [kNm]	α_{cr}	M_{cr} wg (4) [kNm]	
1		6,0	2,0	15,37	9,0	1,542	13,88	15,35
2 ^{*)}	IPE 180			28,07		4,426	39,83	44,43
3 ^{**)}				–		1,930	17,37	20,26
4	CE 180	4,0	1,0	–	2,0	15,161	30,32	32,05
5		4,0	1,0	12,73	2,0	5,708	11,42	11,73
6 ^{*)}	1/2 IPE 180			23,06		17,023	34,05	35,12
7 ^{**)}				–		6,806	13,61	15,98
8	RHS 160 x 80 x 5	6,0	2,0	290,15	9,0	5,955	53,60	289,60

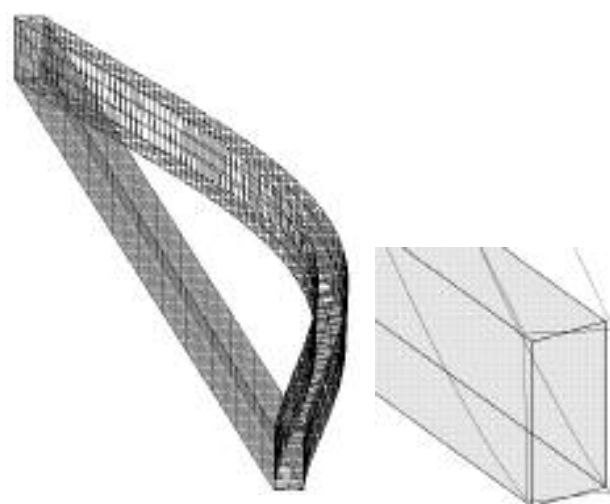
^{*)} punktowe usztywnienie w płaszczyźnie xz pasa ściskanego w środku rozpiętości

^{**)} punktowe usztywnienie w płaszczyźnie xz pasa rozciąganego w środku rozpiętości

– oznacza brak technicznej możliwości otrzymania wyniku

manymi w programie LTBeam, przeznaczonym do obliczania sprężystych momentów krytycznych przekrojów dwuteowych i teowych metodą elementów skończonych. Należy zwrócić uwagę, że **wzór analityczny modelu prętowego nie zawsze umożliwia wyznaczenie M_{cr}** (wiersze 3, 4 i 7 w tabeli), a niejednokrotnie tę wartość zaniża (wiersze 2, 6 w tabeli). Problem ten był omawiany w literaturze m.in. przez Lopeza [4]. W naszej ocenie, w przypadku „nieklasycznych warunków” pracy elementów zginanych zawsze należy kontrolnie zweryfikować proponowaną wartość momentu krytycznego, definiując odpowiedni model powłokowy.

Osobnego komentarza wymagają wartości M_{cr} otrzymane w przypadku przekroju zamkniętego (wiersz 8 w tabeli). Wartości podane dla modelu prętowego i z programu LTBeam są zawyżone, gdyż nie uwzględniają deplanacji przekroju skrzynkowego.

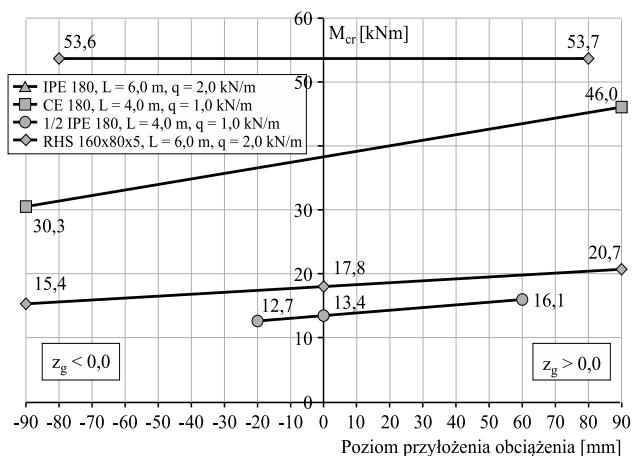


Rys. 2. Kinematyka przestrzennej utraty stateczności belki zginanej o przekroju skrzynkowym (powłokowy model z programu AxisVM)

Fig. 2. The post-buckling deformation of a rectangular hollow section of a beam in bending (shell model obtained in AxisVM software)

Badania opisane w [7] wykazały, że założenie o niezmienności konturu przekroju nie zawsze jest prawdziwe. W związku z tym, ze względu na spaczenie konturu, jakiego przekrój skrzynkowy doznaje przy zwichrzeniu (rysunek 2), charakterystyki geometryczne potrzebne do wyznaczenia momentu krytycznego wg wzoru (3) oraz sam moment krytyczny nie są pełnym opisem zwichrzenia analizowanych przekrojów.

Na rysunku 3 przedstawiono zmianę wartości momentu krytycznego czterech przekrojów w zależności od poziomu przyłożenia obciążenia na wysokości przekroju belki.



Rys. 3. Zmiana wartości momentu krytycznego M_{cr} [kNm] w zależności od poziomu przyłożenia obciążenia względem środka ścinania przekroju z_g [mm]

Fig. 3. The change of the M_{cr} [kNm] as a relation of the height of the applied load to shear center of a section z_g [mm]

Podsumowanie

Nowoczesne konstrukcje szkieletowe charakteryzujące się wyszukaną formą architektoniczną w połączeniu z powszechną minimalizacją kosztów „zmuszają” projektanta do stosowania coraz smuklejszych przekrojów. W efekcie istotne stają się problemy stateczności globalnej i lokalnej. W przypadku gdy przyjmowane schematy statyczne konstrukcji wykraczają poza klasyczne formuły opisujące zjawiska niestateczności, niezbędne staje się przeprowadzenie numerycznej analizy wyoboczeniowej elementu lub grupy elementów w celu określenia ich nośności krytycznej. Należy pamiętać, że analiza MES wymaga od projektanta wycucia w definiowaniu modelu numerycznego.

Literatura

- [1] Timoshenko S. P., Gere J. M., (1961). Theory of elastic stability, McGraw-Hill.
- [2] Bazant Z. P., Cedolin L., (2003). Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories, Dover Publications.
- [3] Weiss S., Giżejowski M., (1991). Stateczność konstrukcji metalowych. Układy prętowe, Arkady, Warszawa.
- [4] Serna M. A., Lopez A., Puente I., Yong D. J., (2006). Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members, Journal of Constructional Steel Research, 62, 566 – 580.
- [5] PN-EN 1993-1-1 (2006). Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [6] CEN European Committee for Standardisation (1992). ENV 1993-1-1, Eurocode 3, Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, Brussels, Belgium.
- [7] Gonçalves R., Dinis P. B., Camotim D., (2009). „GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections”. Thin-Walled Structures, Elsevier Science Limited, 47, 583 – 600.

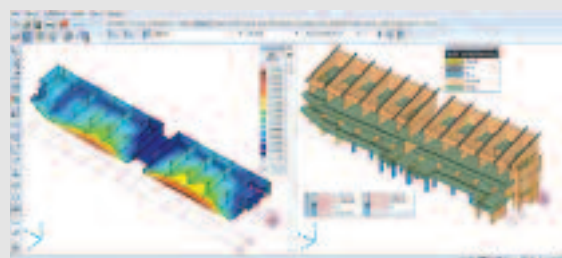
Przyjęto do druku: 25.08.2015 r.

AxisVM

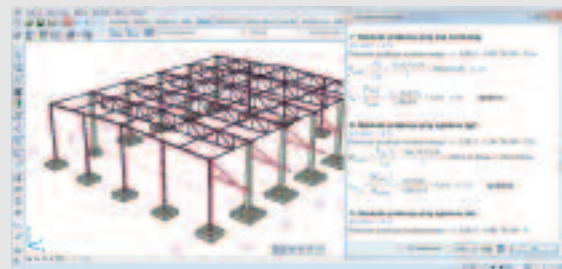
PROGRAM DO ANALIZY I WYMIAROWANIA KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH



• elementy powierzchniowe



• elementy prętowe



- wymiarowanie **stal, żelbet, drewno**
- **modułowa** budowa programu
- **eurokody** z załącznikami krajowymi
- **logiczny interfejs** oparty na zakładkach
- **licencja na kluczu USB**

Darmowa, 30-dniowa
wersja próbna
na www.axisvm.pl

Analiza tarcz, płyt, powłok, prętów
już od **9 200 zł netto**



Wyłączny dystrybutor w Polsce:
GammaCAD sp. z o.o.

A: Romana Maya 1/102, 61-371 Poznań

T: 730 800 133

E: biuro@gammacad.pl

WWW: gammacad.pl | axisvm.pl