

AxisVM

Przewodnik po teorii i projektowaniu elementów X-LAM (CLT)

Edited by: Inter-CAD Kft.
Translated by: GammaCAD

©2022 Inter-CAD Kft.
All rights reserved

™ All brand and product names are trademarks or registered trademarks.

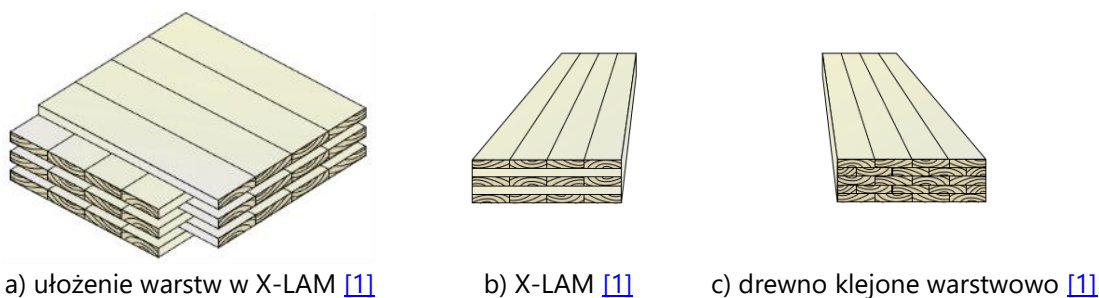
Kwiecień 2022

SPIS TREŚCI

1. OPIS KONSTRUKCYJNY ELEMENTÓW X-LAM.....	3
2. MECHANIKA ELEMENTÓW X-LAM	4
2.1. RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE	4
2.2. ZALEŻNOŚCI MIĘDZY WŁAŚCIWOŚCIAMI MATERIAŁOWYMI	5
2.3. RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE ELEMENTU	6
2.3.1. TEORIA PŁYT MINDLINA DLA LAMINOWANYCH POWŁOK KOMPOZYTOWYCH.....	7
2.3.2. WSPÓŁCZYNNIK KOREKTY ŚCINANIA.....	7
3. PROJEKTOWANIE ELEMENTÓW X-LAM	8
3.1. KLASY TRWANIA OBCIĄŻENIA	8
3.2. KLASY UŻYTKOWANIA.....	8
3.3. WSPÓŁCZYNNIKI MODYFIKUJĄCE WYTRZYMAŁOŚĆ I SZTYWNOŚĆ.....	8
3.4. WARTOŚCI PROJEKTOWE WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁU	10
3.5. WŁAŚCIWOŚCI WYTRZYMAŁOŚCIOWE DREWNA.....	10
3.6. WARTOŚCI OBLICZENIOWE WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁOWYCH	11
3.7. STANY GRANICZNE NOŚNOŚCI	11
3.8. IMPLEMENTACJA W PROGRAMIE AXISVM.....	13
3.8.1. DEFINICJA	13
3.8.2. WYNIKI	15
3.8.3. PORADY I WSKAZÓWKI	17
3.9. PRZYKŁAD LICZBOWY NR 1.....	17
3.10. PRZYKŁAD LICZBOWY NR 2.....	19

1. OPIS KONSTRUKCYJNY ELEMENTÓW X-LAM

Drewno klejone krzyżowo (CLT lub X-LAM): Prefabrykowany, drewniany element konstrukcyjny składający się z co najmniej trzech warstw tarcicy litej lub tarcicy kompozytowej, w której sąsiednie warstwy są zorientowane krzyżowo i połączone klejem strukturalnym w celu stworzenia litego elementu drewnianego [1].



Rysunek 1. Budowa elementów X-LAM

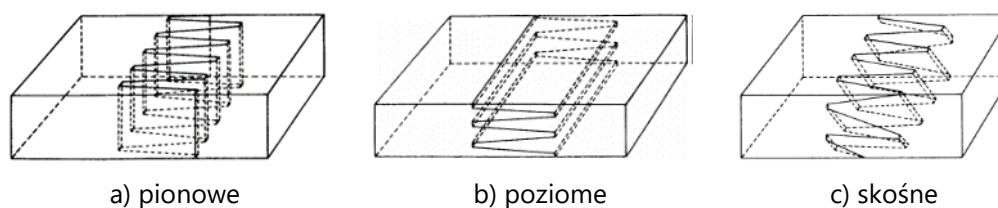
Etapy produkcji elementów X-LAM są następujące:

- ścięcie, selekcja tarcicy, znakowanie, grupowanie, itp.,
- tworzenie lameli (desek) przez ich przycinanie na długość,
- tworzenie elementów jednowarstwowych,
- tworzenie elementów (paneli lub kęsów) z elementów jednowarstwowych,
- kontrola jakości, obróbka skrawaniem, pakowanie, wysyłka, itp.

Materiały wykorzystywane w elementach X-LAM:

- Drewno wykorzystywane do produkcji elementów X-LAM to zazwyczaj suszone komorowo drewno klasy C24 z ograniczoną domieszką drewna klasy C16. Drewno o zawartości wilgoci około $12\% \pm 3\%$ ¹ charakteryzuje się gęstością w przedziale $470\text{--}590\text{ kg/m}^3$ (w zależności od rodzaju drewna).
- Spoiwo stanowi około 0,6% objętości panelu X-LAM, dlatego uznaje się, że zawartość kleju w stosunku do elementu jest niewielka [2]. Podstawowymi spoiwami są: klej melaminowo-mocznikowo-formaldehdydowy (MUF), jednoskładnikowy klej poliuretanowy (PUR), klej fenolowo-rezorcynowo-formaldehdydowy (PRF) i emulsja izocyjanowo-polimerowa (EPI).

W zależności od producenta, warstwy kryjące mogą być wyrównane wzdłuż lub w poprzek panelu, z deskami opcjonalnie klejonymi krawędziowo lub na całej szerokości. Deski podłużne są zwykle łączone na mikrowczepy proste/skośne (patrz Rys. 2) i klejone.



Rysunek 2. Orientacja mikrowczepów skośnych [3]

¹ według [1], inne źródła podają $\pm 2\%$

2. MECHANIKA ELEMENTÓW X-LAM

2.1. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE

W rozdziale opisane zostaną podstawowe, lecz niezbędne do dalszego zrozumienia tekstu, zależności naprężenie-odkształcenie. Szczegółowe wyprowadzenia i informacje znajdują w pracy [4]. Do opisu naprężeń zastosowana zostanie notacja Voighta, gdzie wyrażenie σ_{ij} oznacza naprężenia normalne jeżeli $i = j$ a naprężenie styczne jeżeli $i \neq j$:

$$(\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy}) = (\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy}). \quad (1)$$

Analogicznie zapiszemy odkształcenia inżynierskie:

$$(\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy}) = (\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{yz} \gamma_{xz} \gamma_{xy}) \quad (2)$$

Przyjmując, że składowe naprężeń są funkcjami liniowymi odkształceń oraz zakładając, że konfiguracja odniesienia jest wolna od naprężeń, możemy zapisać równania konstytutywne w skróconej postaci:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy})^T \quad (4)$$

jest wektorem składowych naprężenia,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy})^T \quad (5)$$

jest wektorem składowych odkształceń inżynierskich, a \mathbf{C} jest macierzą sprężystości:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Zakłada się, że zależność opisana równaniem (3) jest odwracalna, dlatego

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} \quad (7)$$

gdzie \mathbf{S} jest macierzą podatności.

Rozsądnym założeniem jest modelowanie drewna jako materiału ortotropowego oraz zapisanie prawa Hooke'a w układzie współrzędnym dopasowanym do jego budowy anatomicznej. Jeśli zdefiniujemy macierz podatności \mathbf{S} w ortogonalnym układzie współrzędnych $\{x_1, x_2, x_3\}$ w taki sposób, że x_1, x_2 i x_3 są zgodne z kierunkiem podłużnym, promieniowym i stycznym wtedy równania (3) i (7) przyjmują następującą postać równania konstytutywnego:

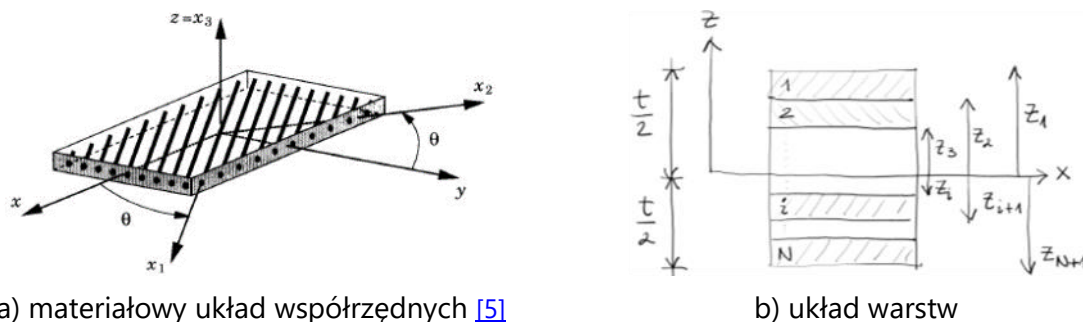
$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^*\boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{S}^*\boldsymbol{\sigma}^*, \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{C}^{*-1}, \quad (9)$$

z wektorami naprężenia i odkształcenia w materialnym układzie współrzędnych:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{13} \sigma_{12})^T \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} \varepsilon_{13} \varepsilon_{12})^T \quad (11)$$



a) materiałowy układ współrzędnych [5]

b) układ warstw

Rysunek 3. Schemat warstw w elementach X-LAM

Macierz podatności \mathbf{S}^* definiowana jest przez 9 niezależnych stałych inżynierskich:

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}. \quad (12)$$

Transformacja współrzędnych

Jak dotąd równania były zapisywane w osiach głównych układu współrzędnych aktualnej warstwy (indeks dolny m). W większości przypadków taki zapis nie pokrywa się z układem współrzędnych zadania. Ponadto, laminat zazwyczaj składa się z kilku warstw o różnej orientacji osi głównych układu współrzędnych (θ , patrz Rys. 3a). Dlatego konieczna jest transformacja naprężeń i odkształceń każdej warstwy do układu współrzędnych zadania. Naprężenia transformują się według zależności (13):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}^* \quad (13)$$

gdzie \mathbf{T} jest macierzą transformacji.

Korzystanie z odkształceń inżynierskich wprowadza pewną niedogodność przy transformacji składowych odkształceń. Zastosowanie w takim przypadku macierzy Reutera pozwala na ich zmniejszenie, w związku z tym:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{RTR}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^*. \quad (14)$$

Ostatecznie współczynniki materiałowe przekształcają się zgodnie z:

$$\mathbf{C} = \mathbf{TC}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{R}, \quad (15)$$

gdzie:

- C jest tensorem sprężystości w odniesieniu do układu współrzędnych zadania,
- C* jest tensorem sprężystości w odniesieniu do materialnego układu współrzędnych.

2.2. ZALEŻNOŚCI MIĘDZY WŁAŚCIWOŚCIAMI MATERIAŁOWYMI

Zgodnie z podrozdziałem 2.1 dla poprawnego określenia równań konstytutywnych materiału potrzebujemy 9 niezależnych stałych inżynierskich. Ponieważ broszury dostarczane przez producentów elementów X-LAM zwykle podają niepełne informacje o ich właściwościach mechanicznych musimy korzystać z innych źródeł. Możemy wykorzystać fakt, że elementy X-LAM są wykonane z drewna iglastego, które wykazuje pewne zależności między ich parametrami sztywności. Są one oparte o dane tabelaryczne zawierające wszystkie 9 stałych materiałowych kilku rodzimych gatunków drzew iglastych w Europie, Ameryce Północnej i Rosji podane przez Hearmon [6], Bodig i Goodman [7] i Askenazi [8] oraz powiązane prace innych badaczy [9], [10].

2.3. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE ELEMENTU

Obecne modele projektowania elementów X-LAM wyłoniły się głównie na kanwie długiej tradycji stosowania w konstrukcjach drewnianych elementów jednowymiarowych. W związku z czym w dużej mierze opierają się one na teoretycznych rozważaniach dotyczących belek. Najpopularniejsze modele przedstawione zostały w przeglądzie literatury Stürzenbecher i in. [11]:

- **Teoria belek łączonych mechanicznie (metoda γ)**

Metoda zaproponowana przez Möhler-a [12], w której krzyżujące się warstwy są rozpatrywane jako połączenia podatne na ścinanie, zamiast jako indywidualne warstwy, poprzez wprowadzenie współczynnika korygującego sztywność przy zginaniu. Istotnym ograniczeniem tej metody jest to, że pozwala ona na projektowanie swobodnie podpartych belek obciążonych obciążeniem sinusoidalnym.

- **Analogia ścinania**

Metoda zaproponowana przez Kreuzinger-a [13], polega na rozdzieleniu ogólnej sztywności giętnej (na zginanie) belki na dwa składniki: sztywność poszczególnych lameli oraz przyrosty sztywności wynikające z ich wspólnego oddziaływania. Udziały sztywności na zginanie i sztywność na ścinanie poszczególnych warstw są przypisane do dwóch belek wykazujących sprzężone przemieszczenia. Metoda pozwala na ominięcie ograniczeń metody γ , stąd podatne połączenia również mogą być przez nią analizowane.

- **Metoda belkowa Timoshenko**

Do projektowania konstrukcji X-LAM teoretycznie najprostszą teorią belkową, rekomendowaną przez Schickhofer i in. [15] jest teoria belkowa Timoshenko [14]. Według Bajczerová [16] metoda ta podaje prawie takie same sztywności co metoda γ .

Wszystkie wyprowadzone dotychczas metody mają tę samą wadę – odnoszą się do belkowej odpowiedzi kinematycznej układu pomijając dwuwymiarowy stan naprężeń. Ponieważ metody te nie dają możliwości swobodnego kształtowania obszaru 2D i jego warunków brzegowych nie mogą być zaimplementowane w programach komercyjnych metody elementów skończonych takich jak AxisVM, gdzie stosowanie powłok 2D jest nieuniknione.

W dziedzinie mechaniki warstwowych konstrukcji kompozytowych powstała duża liczba teorii opisujących te elementy. Wśród tych teorii warto zwrócić uwagę na grupę równoważnych metod jednowarstwowych (ang. *Equivalent Single Layer Methods, ESLM*), których niewątpliwą zaletą stosowania jest stała liczba zmiennych niezależna od liczby warstw analizowanego elementu. W ramach tych teorii płyta kompozytowa jest rozpatrywana jako jednowarstwowy element charakteryzujący się złożonym konstytutywnym modelem. Z drugiej strony metody warstwowe (ang. *Layer-Wise Methods, LWM*) wykazują taką samą liczbę zmiennych niezależnych dla każdej warstwy. Stąd koszt obliczeniowy wzrasta wraz ze wzrostem liczby warstw.

Teoria płyt Mindlina nazywana teorią ścinania pierwszego rzędu (ang. *First-Order Shear Deformation Plate Theory, FSDT*) została zaproponowana w 1951 przez Raymonda Mindlina [17]. Metoda ta jest uogólnieniem teorii belkowej Timoshenko na płyty – układy 2D. Aktualnie metoda ta jest podstawową metodą analizy płyt grubych. Przydatność metody *FSDT* względem innych teorii płytowych, w kontekście odzwierciedlenia deformacji i naprężeń punktowo obciążonych płyt CLT, była przeanalizowana przez Czaderski i in. [18]. Wykazano w tej pracy, że poza obliczeniami 3D FE i teorią płyt Mindlina, pozostałe modele odnotowują przy określaniu deformacji znaczne odchylenia wyników od wartości doświadczalnych. Reprezentacja odpowiedniej sztywności płyt kompozytowych w teorii Mindlina została opisana w [19]. Opierając się na porównaniach z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi Pagano [20], Stürzenbecher i in. [19] wykazali, że pomimo iż bardziej zaawansowane teorie

pozwalają na otrzymanie dokładniejszych wyników, to teoria *FSDT* dostarcza prawidłową informację o rozkładzie naprężeń stycznych obliczonych niedużym kosztem.

Ze względu na integralność z komercyjnymi kodami programów jak i na zadowalające wyniki obliczeń statycznych przyjęto, że płyty kompozytowe będą opisane w oparciu o teorię płytową Mindlina.

2.3.1. TEORIA PŁYT MINDLINA DLA LAMINOWANYCH POWŁOK KOMPOZYTOWYCH

Zachowanie założenia o liniowości przemieszczeń, przy odrzuceniu hipotezy płaskich przekrojów klasycznej teorii płyt dla płyt jednorodnych (ang. *Classical Plate Theory, CPT*) znanej jako teoria płyt Kirchhoffa [21] prowadzi do teorii płyt Mindlina. Pole przemieszczeń przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa}, \quad (16)$$

gdzie

- $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ jest wektorem inżynierskich odkształceń na płaszczyźnie środkowej²,
- z jest najkrótszym odcinkiem między punktem materialnym, a płaszczyzną środkową,
- $\boldsymbol{\kappa}$ jest wektorem krzywizn.

Warto zwrócić uwagę, że faktyczna definicja krzywizn zależy od arbitralnie³ przyjętej konwencji znakowania zmiennych kinematycznych. Schemat warstw przedstawiony jest na rysunku 3, natomiast dla uogólnionej płaskiej powłoki siły wewnętrzne i momenty mogą być zapisane następująco:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dz = \sum_{i=1}^N \left(\int_{z_{i+1}}^{z_i} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dz \right), \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int z \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dz = \sum_{i=1}^N \left(\int_{z_{i+1}}^{z_i} z \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dz \right), \quad (18)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int \boldsymbol{\tau}^{(i)} dz = \sum_{i=1}^N \left(\int_{z_{i+1}}^{z_i} \boldsymbol{\tau}^{(i)} dz \right), \quad (19)$$

lub w bardziej zwartej formie

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

2.3.2. WSPÓŁCZYNNIK KOREKTY ŚCINANIA

Sformułowanie przemieszczeń wg teorii Mindlina-Reissnera powoduje stałą wartość rozkładu naprężeń stycznych na grubości płyty. Z uwagi na to, że nie jest to rzeczywisty rozkład naprężeń stycznych, aby zapewnić stałą wartość energii wewnętrznej w modelu, wprowadzone zostały współczynniki korygujące k_x i k_y . Wyznaczone współczynniki korekty ścinania dla typowego elementu X-LAM wynoszą około 1/4 wartości, jaka występuje w jednorodnych płytach prostokątnych, czyli 5/6. Zostało to potwierdzone w pracy [22]. Warto zaznaczyć, że dokładną wartość współczynnika korekty ścinania można wyznaczyć na podstawie teorii płyt, niemniej prowadzi to do nieliniowego zagadnienia, w którym współczynnik korekty ścinania zależy od rozkładu sił wewnętrznych [23].

² zbiór punktów spełniających zależność $z = 0$

³ z zaznaczeniem, że krzywizny muszą być zgodne energetycznie z momentami

3. PROJEKTOWANIE ELEMENTÓW X-LAM

3.1. KLASY TRWANIA OBCIĄŻENIA

Eurokod EC5 wymaga, aby obciążenia zostały przyporządkowane do jednej z klas trwania obciążenia przedstawionych w Tabeli 1.

Klasy trwania obciążenia	Rząd wielkości skumulowanego czasu trwania obciążenia charakterystycznego
Stałe	ponad 10 lat
Długotrwałe	6 miesięcy – 10 lat
Średniotrwałe	1 tydzień – 6 miesięcy
Krótkotrwałe	mniej niż 1 tydzień
Chwilowe	

Tabela 1. Klasy trwania obciążenia

3.2. KLASY UŻYTKOWANIA

Konstrukcje powinny być zaliczane do jednej z podanych niżej klas użytkowania:

- **Klasa użytkowania 1 (KU1)**

Charakteryzuje się wilgotnością materiału odpowiadającą temperaturze 20°C i wilgotnością względną otaczającego powietrza przekraczającą 65% tylko przez kilka tygodni w roku.

- **Klasa użytkowania 2 (KU2)**

Charakteryzuje się wilgotnością materiału odpowiadającą temperaturze 20°C i wilgotnością względną otaczającego powietrza przekraczającą 85% tylko przez kilka tygodni w roku.

3.3. WSPÓŁCZYNNIKI MODYFIKUJĄCE WYTRZYMAŁOŚĆ I SZTYWNOŚĆ

Wpływ wilgotności i czasu trwania obciążenia na wytrzymałość. Wpływ jest uwzględniany za pomocą współczynnika modyfikującego k_{mod} . Jego wartość zależy od klasy użytkowania i klasy trwania obciążenia opisanych w EC5. Dla X-LAM nie ma znormalizowanych wartości k_{mod} dlatego przyjęto je w oparciu o [24] i zestawiono w Tabeli 2.

Klasa użytkowania	Klasa trwania obciążenia				
	Stałe	Długotrwałe	Średniotrwałe	Krótkotrwałe	Chwilowe
KU1	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
KU2	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Tabela 2. Wartości k_{mod} dla X-LAM

Wpływ wilgotności na odkształcenia. Efekt ten jest uwzględniany za pomocą współczynnika modyfikującego k_{def} który przyjmujemy z Tabeli 3 w zależności od klasy użytkowania konstrukcji. Wartości te bazują na zaproponowanych w [25] i [24] wartościach dla klas użytkowania 1 i 2. Z uwagi na brak zatwierdzenia wartości dla klasy użytkowania 3 przyjęto dla niej wartość z EC5 jak dla sklejk.

KU1	KU2	KU3
0.8	1.0	2.5

Tabela 3. Wartości k_{def} dla X-LAM

Wpływ kształtu elementu na wytrzymałość. Dla elementów drewnianych współczynnik modyfikujący k_h jest wykorzystywany do zwiększenia nośności charakterystycznej na podstawie wymiarów przekroju elementu względem wartości referencyjnych. Brak uregulowań normowych w odniesieniu do X-LAM powoduje, że przyjęto $k_h = 1,0$.

Wytrzymałość układu konstrukcyjnego (wpływ rozwiązania konstrukcyjnego). W przypadku, gdy elementy lub konstrukcje wieloelementowe o jednakowych rozstawach są wzajemnie połączone (podparcia boczne) w sposób zapewniający redystrybucję obciążeń ciągłych, ich właściwości wytrzymałościowe można pomnożyć przez współczynnik k_{sys} , uwzględniający wpływ rozwiązania konstrukcyjnego. Wzrost wytrzymałości odnosi się do naprężeń równoległych kilku płyt (naprężenia normlane i od zginania) poza przypadkiem występowania w płycie naprężeń od ścinania tarczowego (PN-EN 1995-1-1, Rozdział 6.6). Zgodnie z EC5, dla klejonych lub sprężonych laminowanych belek drewnianych i stropów wartość k_{sys} można określić wg

$$k_{sys} = \min\{1,2; 1 + 0,025n\} \quad (21)$$

gdzie

n jest liczbą obciążonych laminatów.

Wprowadzenie tego parametru można wytłumaczyć faktem, że metodologia wymiarowania w EC5 opiera się na modelach belkowych, które pomijają efekty wynikające z współczynnika Poissona.

Wpływ pęknięć. Zgodnie z EC5, przy sprawdzaniu nośności na ścinanie elementów zginanych, wpływ pęknięć powinien być brany pod uwagę za pomocą współczynnika k_{cr} . Wartości rekomendowane k_{cr} są następujące:

$k_{cr} = 0,67$ dla drewna litego,

$k_{cr} = 0,67$ dla drewna klejonego warstwowo

$k_{cr} = 1,0$ dla materiałów drewnopochodnych wg EN 13986 i EN 14374.

Niemniej w [26] zauważono, że stosowanie współczynnika pęknięć nie jest konieczne w przypadku dwuwymiarowych elementów drewnianych klejonych krzyżowo z wbudowanymi złączami, gdyż możliwe pęknięcia uwzględnione są w kartach produktu.

Efekt kształtu przekroju. Efekt wpływu kształtu przekroju poprzecznego na wytrzymałość belek uwzględnia się stosując współczynnik k_{shape} do określenia wytrzymałości stycznej. Z uwagi na fakt, że parametr odnosi się do belek, w przypadku X-LAM przyjęto wartość $k_{shape} = 1,0$.

Efekt połączeń na mikro wczepy (ang. *finger joints*). Zgodnie z [26] w przypadku typowych elementów krzyżowo klejonych łączonych na mikrowczepy (nazywanych również wczepami palcowymi), ich nośność na zginanie redukuje się o 30%. Redukcja jest realizowana za pomocą współczynnika k_{fin} . Zastosowanie tego współczynnika zakłada występowanie łączenia na mikrowczepy tylko po kierunku podłużnym.

Częściowy współczynnik bezpieczeństwa właściwości materiału. Częściowy współczynnik bezpieczeństwa właściwości materiału γ_M dla stanów nośności może być określony przez załączniki

krajowe do normy. Jeżeli nie zdefiniowano inaczej w załącznikach krajowych, wartość tego parametru należy przyjmować $\gamma_M = 1,25$ wg [24].

3.4. WARTOŚCI PROJEKTOWE WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁU

Określenie projektowych wartości właściwości materiału χ wg EC5 przedstawiono w Tabeli 4. W tabeli 4, można przyjąć konserwatywnie $\varphi_2 = 1,0$ w przypadku braku wcześniejszych obliczeń. Współczynniki Poissona należy stosować z ich wartościami podanymi w rozdziale 2.2.

Typ analizy	SGU	SGN
pierwszego rzędu, liniowo sprężysta	$\chi = \frac{\chi_{mean}}{1 + k_{def}}$	$\chi = \frac{\chi_{mean}}{1 + \varphi_2 k_{def}}$
drugiego rzędu, liniowo sprężysta	$\chi = \frac{\chi_{mean}}{\gamma_M}$	$\chi = \frac{\chi_{mean}}{\gamma_M}$
Drgania	$\chi = \chi_{mean}$	$\chi = \chi_{mean}$

Tabela 4. Wyznaczenie parametrów sztywności

3.5. WŁAŚCIWOŚCI WYTRZYMAŁOŚCIOWE DREWNA

Mechaniczne właściwości elementów krzyżowo klejonych (CLT) zależą, podobnie jak inne produkty drewnopochodne takie jak fornir klejony warstwowo (LVL) czy belki klejone warstwowo, od producenta. Zazwyczaj właściwości mechaniczne są dostarczane przez producenta na zastrzeżonych zasadach, dlatego konsultacje z każdym producentem są wskazane i kluczowe podczas procesu projektowania tego typu elementów. Tabela 5 przedstawia wytrzymałości X-LAM wg EN 388 i innych odpowiednich źródeł [27], [26].

Zginanie wzdłuż włókien (w EC5 oznaczane jako $f_{m,k}$)	$f_{m,0,k}$	24,0
Zginanie w poprzek włókien (nie definiowane w aktualnej normie EC5)	$f_{m,90,k}$	0,5
Rozciąganie wzdłuż włókien	$f_{t,0,k}$	14,0
Rozciąganie w poprzek włókien	$f_{t,90,k}$	0,5
Ściskanie wzdłuż włókien	$f_{c,0,k}$	21,0
Ściskanie w poprzek włókien	$f_{c,90,k}$	2,5
Ścinanie	$f_{v,k}$	2,5
Ścinanie prostopadłe do włókien	$f_{r,k}$	1,0
Ścinanie przy skręcaniu	$f_{T,k}$	2,5

Tabela 5. Charakterystyczne nośności drewna klasy C24 w N/mm² wg EN 388

Uwagi:

Dla standardowych połączeń na mikrowczepy (wczep palcowy) wytrzymałość na zginanie elementów CLT musi być zredukowana.

Kształt i obróbka warstw płyty decyduje o wytrzymałości na ścinanie prostopadłe do włókien. Stąd w tym przypadku w szczególności odniesiono się do aprobaty produktu. Jeżeli płyty są klejone na

brzegach lub jeżeli nie są klejone, ale stosunek szerokości do grubości wynosi przynajmniej 4:1, wtedy właściwości są określane wg EN 16351:2013.

Dla standardowych połączeń na mikrowczepy w elementach krzyżowo klejonych wytrzymałość na zginanie musi być zredukowana.

3.6. WARTOŚCI OBLICZENIOWE WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁOWYCH

Wartość obliczeniową χ_d właściwości wytrzymałościowej należy obliczać ze wzoru:

$$\chi_d = k_{mod} \frac{\chi_k}{\gamma_M} \quad (22)$$

gdzie:

χ_d jest wartością charakterystyczną właściwości wytrzymałościowej;

γ_M jest częściowym współczynnikiem bezpieczeństwa właściwości materiału;

k_{mod} jest współczynnikiem modyfikującym wytrzymałość z uwagi na czas trwania obciążenia i wilgotność.

Zgodnie z danymi z poprzednich rozdziałów wartości charakterystyczne podane w Tabeli 5 przyjmą następujące wartości obliczeniowe:

$$f_{t,0,d} = f_{t,0,k} \cdot k_{mod} \cdot k_{sys} / \gamma_M$$

$$f_{t,90,d} = f_{t,90,k} \cdot k_{mod} \cdot k_{sys} / \gamma_M$$

$$f_{c,0,d} = f_{c,0,k} \cdot k_{mod} / \gamma_M$$

$$f_{c,90,d} = f_{c,90,k} \cdot k_{mod} / \gamma_M$$

$$f_{v,d} = f_{v,k} \cdot k_{mod} / \gamma_M$$

$$f_{r,d} = f_{r,k} \cdot k_{mod} / \gamma_M$$

$$f_{m,0,d} = f_{m,0,k} \cdot k_{mod} \cdot k_{sys} \cdot k_{fin} / \gamma_M$$

$$f_{m,90,d} = f_{t,90,k} \cdot k_{mod} \cdot k_{sys} / \gamma_M$$

3.7. STANY GRANICZNE NOŚNOŚCI

W tym rozdziale przedstawione zostaną warunki stanów granicznych nośności zgodne z EN 1995-1-1 [28], DIN 1052:2004-8 [29] literaturą przedmiotu [30], [31], [22], [27].

W programie AxisVM sprawdzane są tylko wymienione poniżej warunki nośności. Pozostałe kryteria wymienione w normach projektowych dla podparć, połączeń itp. muszą być uzupełnione przez użytkownika indywidualnie.

Zginanie z rozciąganiem osiowym równoległym do włókien

$$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{|\sigma_{m,0,d}|}{f_{m,0,d}} \leq 1,0 \quad (23)$$

gdzie

$\sigma_{t,0,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami rozciągającymi wzdłuż włókien;

$f_{t,0,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na rozciąganie wzdłuż włókien;

$\sigma_{m,0,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy zginaniu wzdłuż włókien;

$f_{m,0,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością przy zginaniu wzdłuż włókien.

Zginanie z rozciąganiem osiowym prostopadłym do włókien

$$\frac{\sigma_{t,90,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{|\sigma_{m,90,d}|}{f_{m,0,d}} \leq 1,0 \quad (24)$$

gdzie

- $\sigma_{t,90,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami rozciągającymi prostopadłymi do włókien;
 $f_{t,90,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na rozciąganie prostopadłą do włókien;
 $\sigma_{m,90,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy zginaniu prostopadłym do włókien;
 $f_{m,90,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością przy zginaniu prostopadłym do włókien.

Zginanie ze ściskaniem osiowym równoległym do włókien

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{|\sigma_{m,0,d}|}{f_{m,0,d}} \leq 1,0 \quad (25)$$

gdzie

- $\sigma_{c,0,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami ściskającymi wzdłuż włókien;
 $f_{c,0,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na ściskanie wzdłuż włókien;
 $\sigma_{m,0,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy zginaniu wzdłuż włókien;
 $f_{m,0,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością przy zginaniu wzdłuż włókien.

Zginanie ze ściskaniem osiowym prostopadłe do włókien

$$\frac{\sigma_{c,90,d}}{k_{c,90} \cdot f_{c,90,d}} + \frac{|\sigma_{m,90,d}|}{f_{m,0,d}} \leq 1,0 \quad (26)$$

gdzie

- $\sigma_{c,90,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami ściskającymi prostopadłymi do włókien;
 $f_{c,90,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na ściskanie prostopadłą do włókien;
 $k_{c,90}$ jest współczynnikiem uwzględniającym rozkład obciążenia, możliwość powstania pęknięć oraz stopień odkształcenia przy ściskaniu;
 $\sigma_{m,90,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy zginaniu prostopadłe do włókien;
 $f_{m,90,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością przy zginaniu prostopadłym do włókien.

W przypadku braku wartości standardowych, przyjęcie $k_{c,90} = 1,0$ jest podejściem konserwatywnym.

Ścinanie ze skręcaniem

$$\frac{|\tau_{T,d}|}{f_{v,d}} + \left(\frac{\tau_d}{f_{v,d}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r,d}}{f_{r,d}}\right)^2 \leq 1,0 \quad (27)$$

gdzie

- $\tau_{T,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami stycznymi od skręcania;
 τ_d są obliczeniowymi naprężeniami stycznymi;
 $\tau_{r,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy ścinaniu prostopadłym do włókien;
 $f_{v,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na ścinanie;
 $f_{r,d}$ jest obliczeniową nośnością na ścinanie przy ścinaniu prostopadłym do włókien.

Ścinanie prostopadłe do włókien z rozciąganiem prostopadłym do włókien

$$\frac{|\sigma_{t,90,d}|}{f_{t,90,d}} + \frac{|\tau_{r,d}|}{f_{r,d}} \leq 1,0 \quad (28)$$

gdzie

- $\sigma_{t,90,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami rozciągającymi prostopadłymi do włókien;
- $f_{t,90,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na rozciąganie prostopadłą do włókien;
- $\tau_{r,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy ścinaniu prostopadłym do włókien;
- $f_{r,d}$ jest obliczeniową nośnością na ścinanie przy ścinaniu prostopadłym do włókien.

Ścinanie prostopadłe do włókien z ściskaniem prostopadłym do włókien

$$\frac{|\sigma_{c,90,d}|}{f_{c,90,d}} + \frac{|\tau_{r,d}|}{f_{r,d}} \leq 1,0 \quad (29)$$

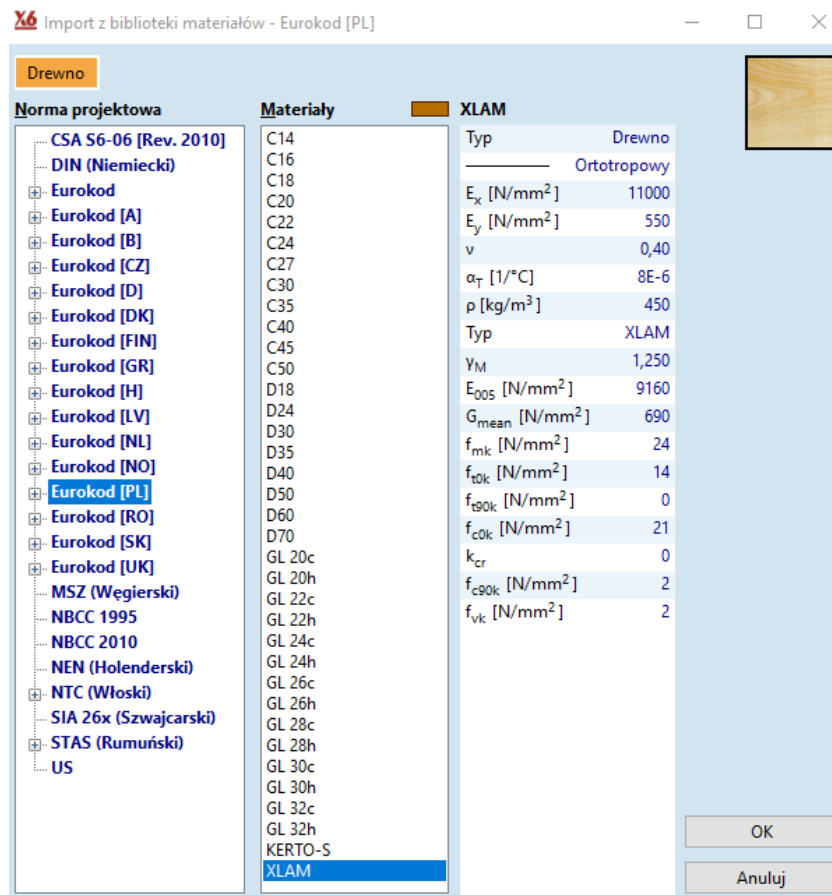
gdzie

- $\sigma_{c,90,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami ściskającymi prostopadłymi do włókien;
- $f_{c,90,d}$ jest obliczeniową wytrzymałością na ściskanie prostopadłą do włókien;
- $\tau_{r,d}$ są obliczeniowymi naprężeniami przy ścinaniu prostopadłym do włókien;
- $f_{r,d}$ jest obliczeniową nośnością na ścinanie przy ścinaniu prostopadłym do włókien.

3.8. IMPLEMENTACJA W PROGRAMIE AXISVM

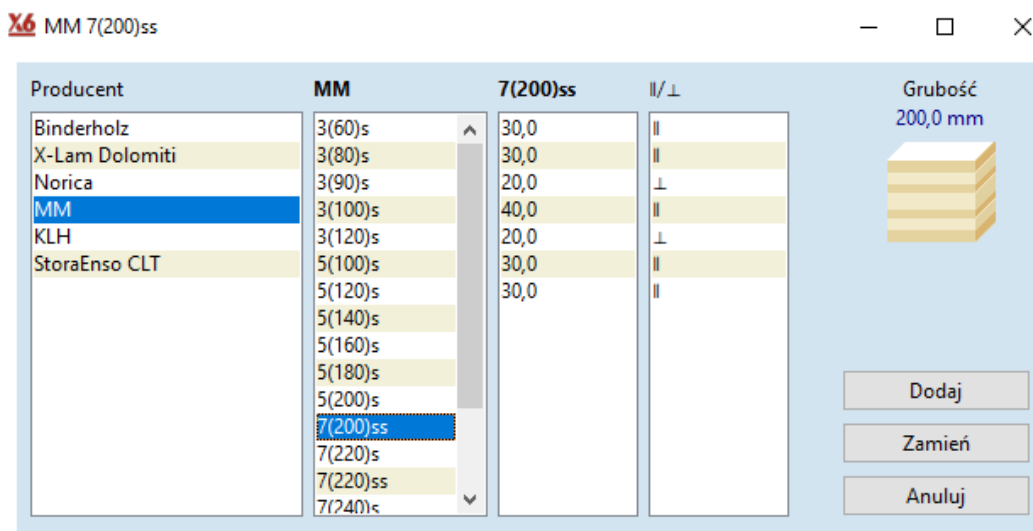
3.8.1. DEFINICJA

Przy definiowaniu obszaru typu „XLAM” (zakładka *Elementy*, ikona *Obszar*, lista rozwijana *Typ*) należy wybrać materiał XLAM, patrz rysunek 4, które posiada predefiniowane parametry odpowiadające tym opisanym w rozdziale 2.2 i 3.5.

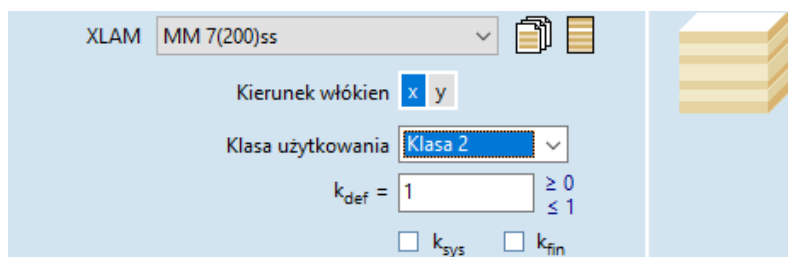


Rysunek 4. Wybór materiał XLAM z predefiniowanymi właściwościami w AxisVM

Produkty XLAM dostępne są w bibliotece XLAM, patrz rysunek 5. Orientacja wszystkich warstw odnosi się do orientacji włókien warstwy górnej traktowanej jako referencyjna, patrz rysunek 6. Definiując obszar można określić klasę użytkowania, a także zdecydować czy zastosować współczynnik k_{sys} czy k_{fin} .



Rysunek 5. Właściwości materiałowe produktów XLAM w AxisVM



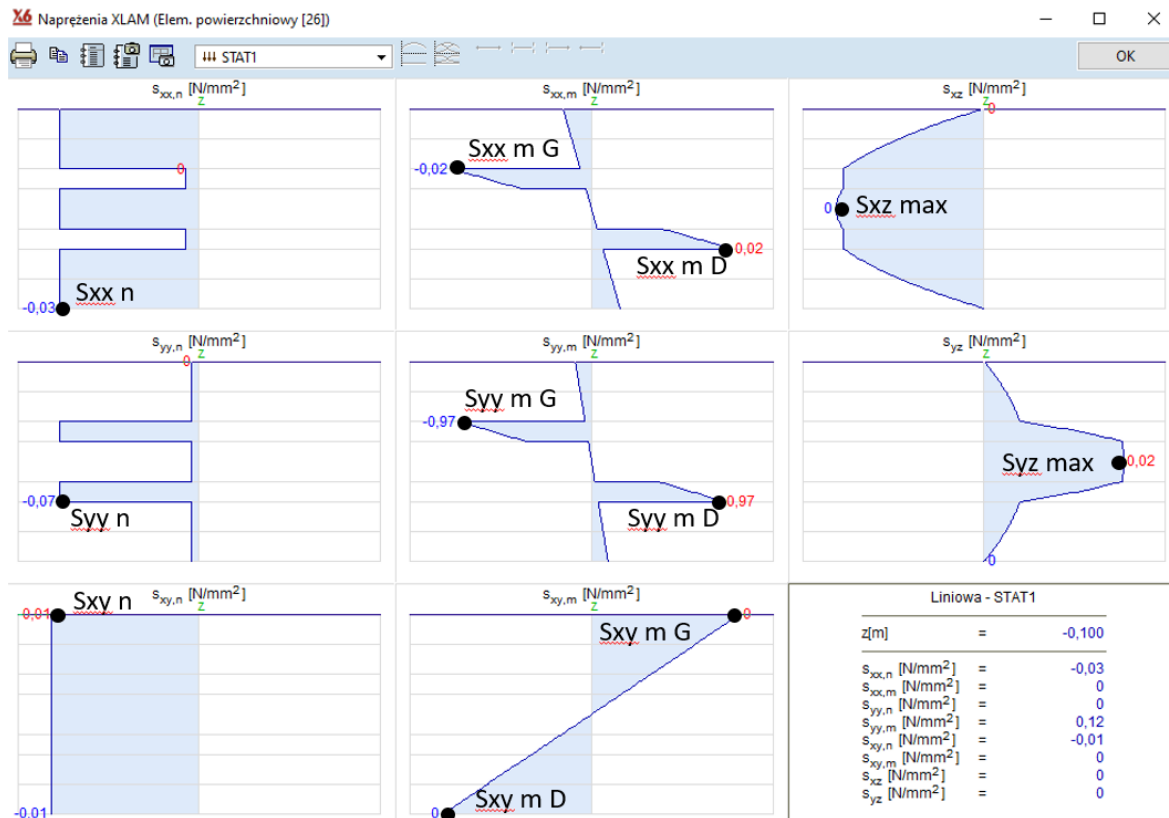
Rysunek 6. Definicja obszaru typu XLAM w AxisVM

3.8.2. WYNIKI

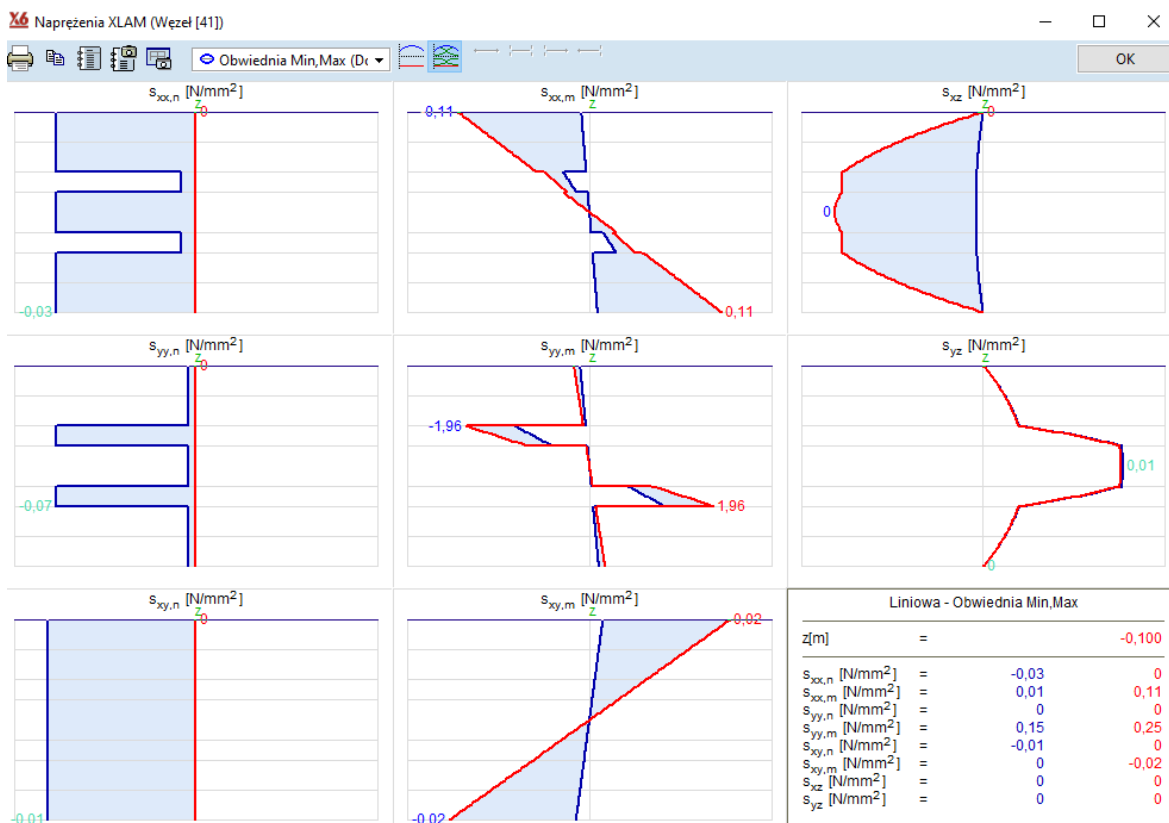
Sposoby wyświetlania wyników XLAM, w tym również naprężeń, nie różnią się od standardowych sposobów (wykres, izolinie, izopowierzchnie 2D, izopowierzchnie 3D) dostępnych w programie AxisVM. Jak zwykle w przypadku projektowania konstrukcji drewnianych naprężenia są rozdzielone w zależności od źródła efektów powłokowych lub płytowych. Składowe naprężenia pochodzące od zginania są przechowywane z ich maksymalnymi i minimalnymi wartościami wzdłuż grubości. Z tych dwóch, jeden odpowiadający punktowi o dodatniej współrzędnej pionowej, będzie oznaczony jako „góra” (np. S_{xx} m G), drugi o ujemnej współrzędnej pionowej jako „dół” (np. S_{xx} m D). Składowe naprężenia wywołane siłami normalnymi i ścinającymi są reprezentowane przez wartość na grubości, która ma największą wartość bezwzględną. Wartości reprezentatywne dla wybranego arbitralnie punktu środkowego elementu powierzchniowego zaznaczono czarnymi kropkami na rysunku 7. Klikając węzeł elementu powierzchniowego wyświetla się rozkład naprężeń wzdłuż grubości. Jeżeli będą wyświetlane obwiednie wtedy wartości ekstremalne zostaną podświetlone, na czerwono maksymalne i na niebiesko minimalne, patrz rysunek 8.

Weryfikacja nośności przekroju składa się z 4 warunków nośności:

- stopień wykorzystania M-N-0: równania (23) i (25)
- stopień wykorzystania M-N-90: równania (24) i (26)
- stopień wykorzystania V-T: równanie (27)
- stopień wykorzystania Vr-N: równania (28) i (29)



Rysunek 7. Rozkład naprężeń w programie AxisVM
(punkt środkowy elementu powierzchniowego)



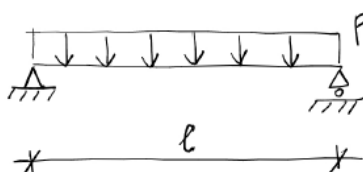
Rysunek 8. Rozkład naprężeń w węźle (składowa $s_{xy,m}$ jest aktywna)

3.8.3. PORADY I WSKAZÓWKI

- Obliczenia i projektowanie elementów XLAM nie jest zawarte w aktualnie dostępnych normach do projektowania. Warto w takiej sytuacji korzystać z broszur producentów lub dokumentów ETA⁴.
- Wartość wytrzymałości $f_{t,90,k}$ dla drewna iglastego jest zazwyczaj dużo niższa niż $f_{t,0,k}$. Jeżeli jakiś punkt jest w dwuosiowym stanie naprężenia, wtedy zazwyczaj sprawdzenie stopnia wykorzystania M-N-90 jest najniekorzystniejsze. W takiej sytuacji mogą pojawić się pęknięcia wzdłuż włókien w strefie rozciąganej. Zadaniem projektanta jest niedopuszczenie do takiego mechanizmu zniszczenia XLAM.

3.9. PRZYKŁAD LICZBOWY NR 1

Wyznacz naprężenia i sprawdź stopień wykorzystania układu przedstawionego na rysunku 9. Obliczenia przeprowadzono z dokładnością 4 cyfr znaczących i w jednostkach [kN] i [cm].



Rysunek 9. Schemat statyczny przykładu 1

Dane wejściowe zadania:

nazwa produktu:	KLH 3(60)s TL
długość:	$l = 600,0$ cm
szerokość:	$b = 1,0$ cm (obliczenia na 1 cm szerokości belki)
średni moduł sprężystości wzdłuż włókien:	$E_{0,mean} = 1100$ kN/cm ²
średni moduł sprężystości prostopadle do włókien:	$E_{90,mean} = 55,00$ kN/cm ²
orientacja włókien górnej warstwy:	x
grubość:	$(t_1 = 2$ cm, $t_2 = 2$ cm, $t_3 = 2$ cm)
grubość:	$t = 6,000$ cm
kierunek włókien:	(, ⊥,)
klasa użytkowania:	1
klasa trwania obciążenia:	stałe
obciążenie:	$p = 0,0001$ kN/cm ²

Obliczenia ręczne:

$$k_{def} = 0,800$$

$$\text{sztynność giętna: } EI = 19100 \text{ kN/cm}^2,$$

(sztynność policzona jak dla układu zespolonego wg następującego wzoru:

$$EI = E_{0,mean} \frac{bt_1^3}{12} + E_{90,mean} \frac{bt_2^3}{12} + E_{0,mean} \frac{bt_3^3}{12} + \frac{E_{0,mean}bt_1E_{0,mean}bt_3}{E_{0,mean}bt_1 + E_{0,mean}bt_3} e^2 =$$

$$= 1100 \frac{1 \cdot 2^3}{12} + 55 \frac{1 \cdot 2^3}{12} + 1100 \frac{1 \cdot 2^3}{12} + \frac{1100 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1100 \cdot 1 \cdot 2}{1100 \cdot 1 \cdot 2 + 1100 \cdot 1 \cdot 2} 4^2 = 19103,33 \text{ kNcm}^2,$$

$E_{0,mean}$
$E_{90,mean}$
$E_{0,mean}$

⁴ The European Technical Assessment (ETA) jest alternatywą dla wyrobów budowlanych nie objętych normalizacją. Jest to dokument zawierający informacje o ich właściwościach.

gdzie e jest odległością między środkami ciężkości górnej i dolnej warstwy

maksymalny wazony moment statyczny:

$$S_{max} = 4427 \text{ cm}^4,$$

maksymalny moment zginający w przęśle:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} = 4,500 \text{ kNcm}$$

maksymalna siła ścinająca na podporze:

$$V_{max} = \frac{pl}{2} = 0,03000 \text{ kN}$$

maksymalne naprężenia normalne:

$$\sigma_{x,max} = E_{0,mean} \frac{M_{max} t}{EI} = 0,7774 \text{ kN/cm}^2$$

maksymalne naprężenia styczne:

$$\tau_{max} = \frac{V_{max} S_{max}}{EI} = 0,006952 \text{ kN/cm}^2$$

maksymalne ugięcie:

$$w_{max} = \frac{5pl^4}{384EI} (1 + k_{def}) = 15,90 \text{ cm}$$

$$k_{mod} = 0,6000 / k_{fin} = 1,000 / \gamma_M = 1,250$$

obliczeniowa wytrzymałość przy zginaniu:

$$f_{m,0,d} = \frac{f_{m,0,k} k_{mod} k_{sys} k_{fin}}{\gamma_M} = 1,152 \text{ kN/cm}^2$$

wskaźnik wykorzystania przy zginaniu:

$$0,6748$$

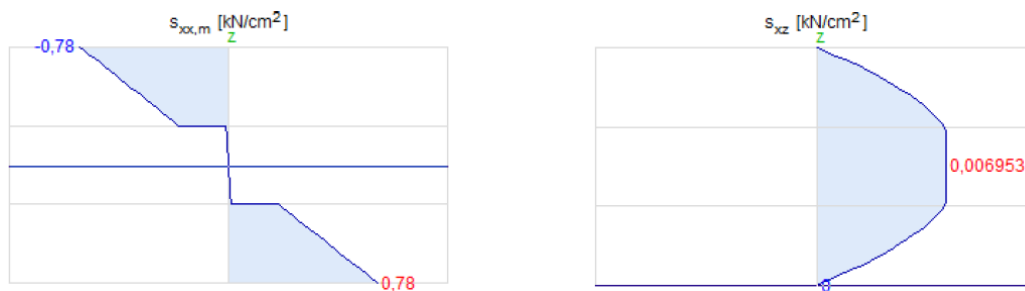
obliczeniowa wytrzymałość przy ścinaniu:

$$f_{r,d} = \frac{f_{r,k} k_{mod}}{\gamma_M} = 0,048 \text{ kN/cm}^2$$

wskaźnik wykorzystania przy ścinaniu:

$$0,1448$$

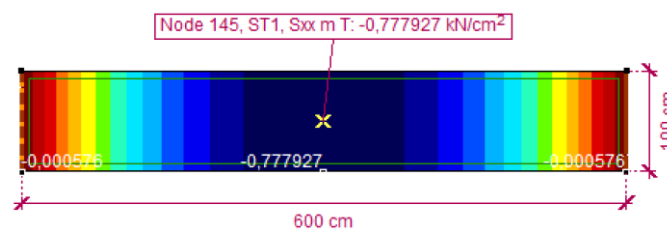
Wyniki z programu AxisVM (dla $\nu = 0$)



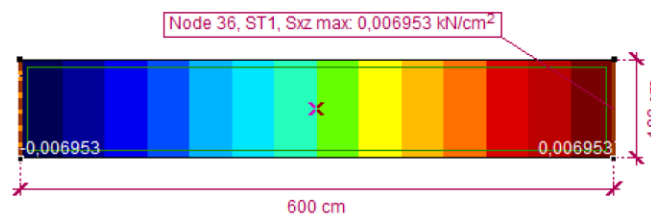
a) rozkład σ_{xx} w środku rozpiętości

b) rozkład σ_{xz} na podporze

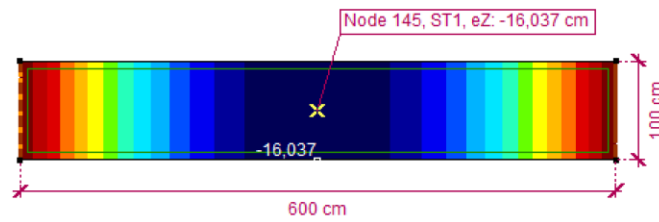
Rysunek 10. Rozkład naprężeń w przykładzie 1



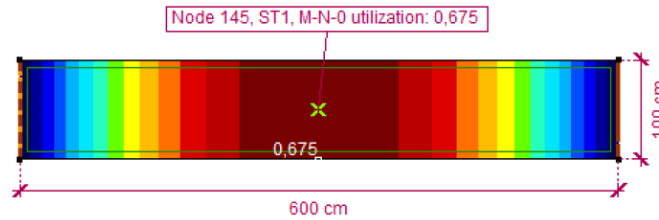
Rysunek 11. Wykres naprężeń $S_{xx,max}$ dla przykładu 1 z programu AxisVM



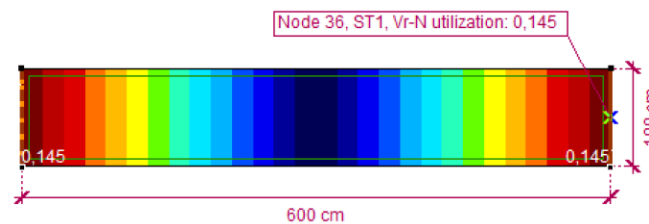
Rysunek 12. Wykres naprężeń $S_{xz,max}$ dla przykładu 1 z programu AxisVM



Rysunek 13. Wykres ugięć dla przykładu 1 z programu AxisVM



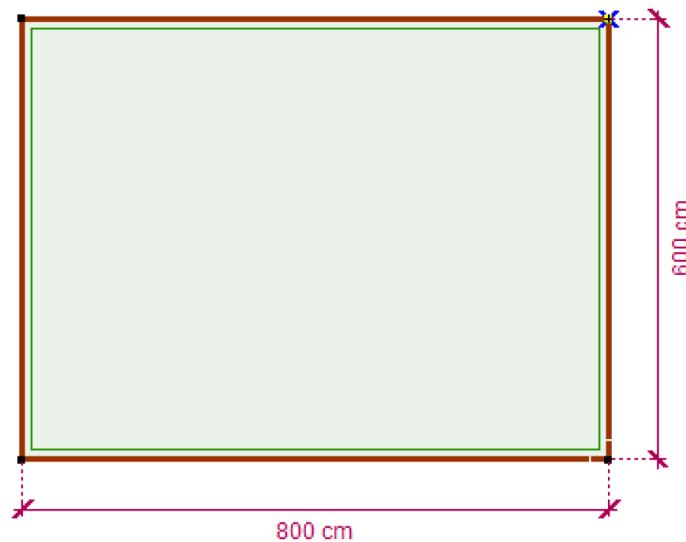
Rysunek 14. Wykorzystanie M-N-0 dla przykładu 1



Rysunek 15. Wykorzystanie Vr-N dla przykładu 1

3.10. PRZYKŁAD LICZBOWY NR 2

W tym przykładzie przedstawiono wyznaczenie sztywności powłoki X-LAM, pokazanej na rysunku 16. Obliczenia przeprowadzono z dokładnością 4 cyfr znaczących i w jednostkach [kN] i [cm].



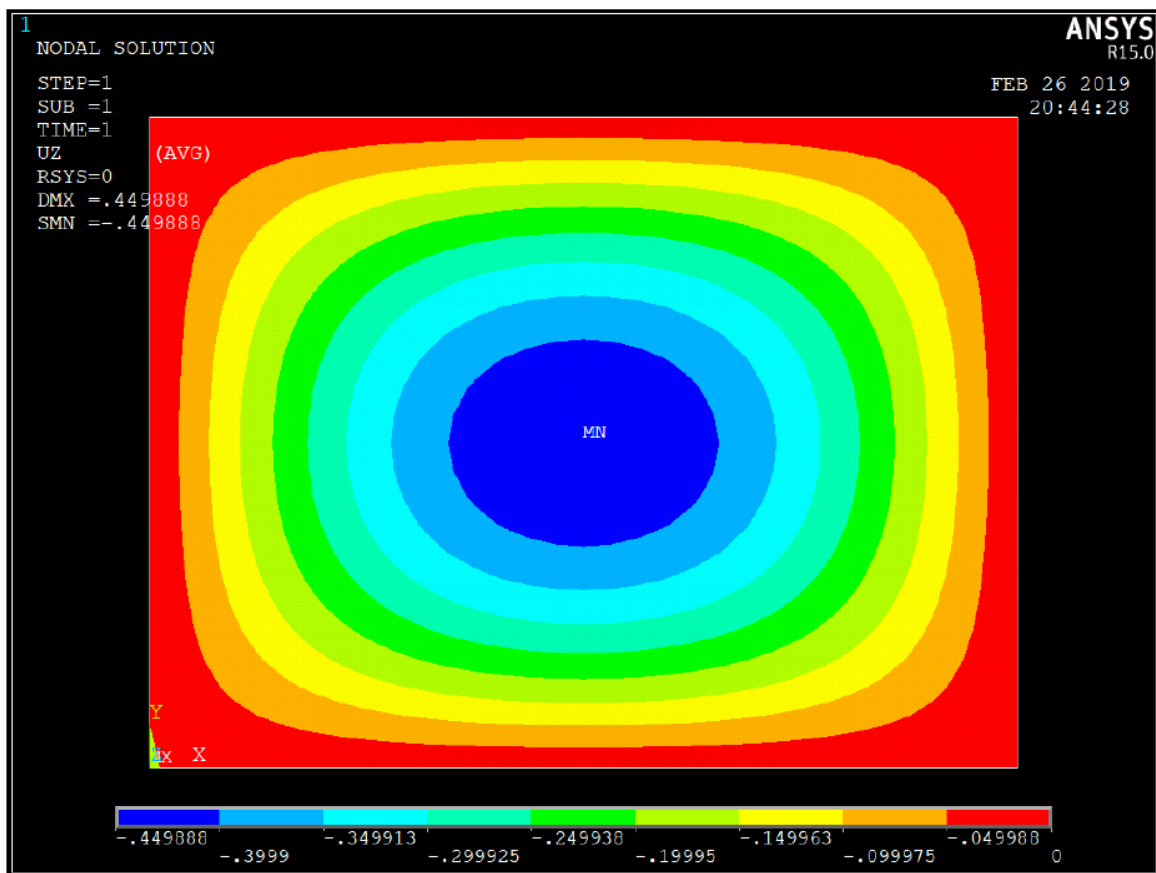
Rysunek 16. Schemat zadania w przykładzie 2

Dane wejściowe zadania:

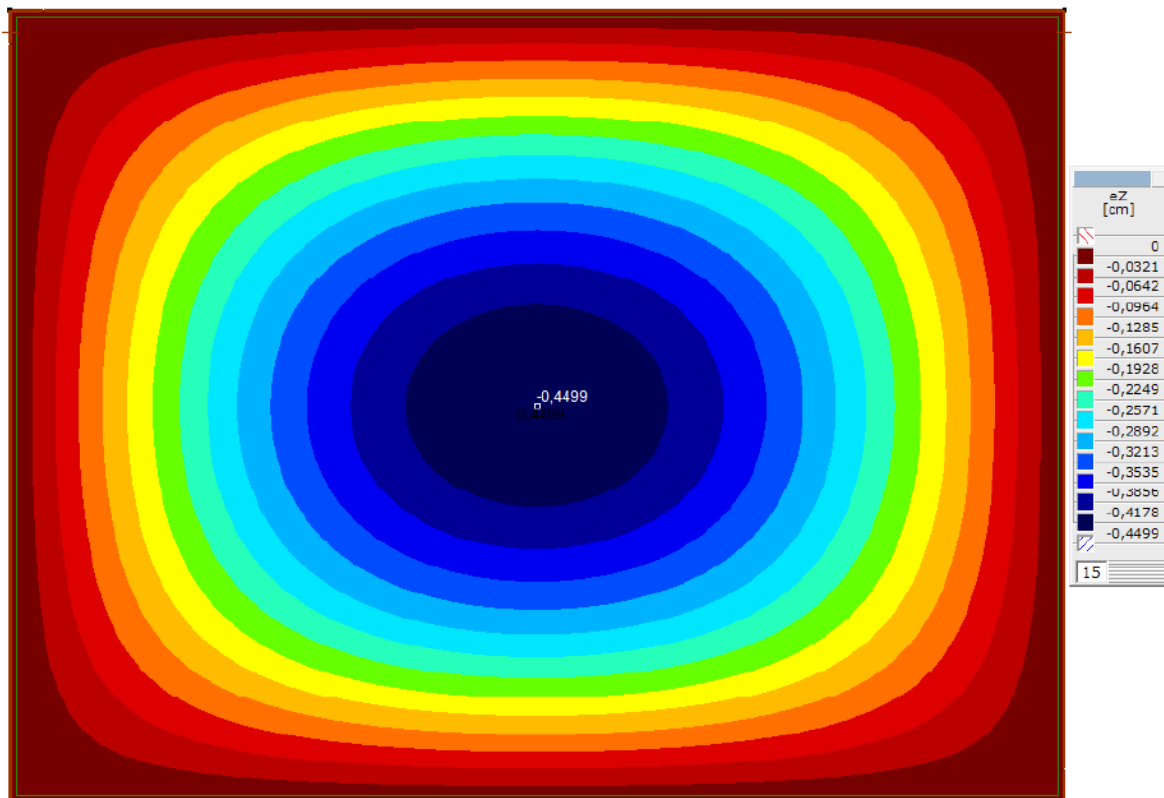
nazwa produktu:	Binderholz 7(260) 125
średni moduł sprężystości wzdłuż włókien:	$E_{0,mean} = 1100 \text{ kN/cm}^2$
średni moduł sprężystości prostopadłe do włókien:	$E_{90,mean} = 55,00 \text{ kN/cm}^2$
średni moduł ścinania:	$G_{mean} = 69,00 \text{ kN/cm}^2$

średni moduł ścinania w poprzek włókien:	$G_{r,mean} = 6,900 \text{ kN/cm}^2$
orientacja włókien górnej warstwy:	x
grubości:	(6, 2, 4, 2, 4, 2, 6) [cm]
kierunek włókien:	(, ⊥, , ⊥, , ⊥,)
klasa użytkowania:	1
klasa trwania obciążenia:	stałe
obciążenie:	$p = 0,0001 \text{ kN/cm}^2$

Przedstawione wyniki obliczeń z programu AxisVM zostały porównane z wynikami otrzymanymi z programu ANSYS przy zastosowaniu elementów powłokowych typu SHELL281.



Rysunek 17. Pole przemieszczeń zadania z przykładu 2 w programie ANSYS przy elemencie skończonym o wielkości 25cm



Rysunek 18. Pole przemieszczeń zadania z przykładu 2 w programie AxisVM przy elemencie skończonym o wielkości 25cm

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Karacabeyli, B. Douglas, CLT Handbook: cross-laminated timber, Pointe-Claire, Quebec: FPInnovations, 2013 (2013).
- [2] X-lam allaince technical issue 1, Tech. rep.
- [3] R. W. Jokerst, Finger-jointed wood products, Tech. Rep. FPL-RP-382, Forest Products Laboratory (apr 1981).
- [4] R. Jones, Mechanics Of Composite Materials, Materials Science and Engineering Series, Taylor & Francis, 1998 (1998).
- [5] J. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition, CRC Press, 2004 (2004).
- [6] R. F. S. Hearmon, The Elasticity of Wood and Plywood, Forest products research, H.M. Stationery Office, 1948 (1948).
- [7] J. Bodig, J. Goodman, Prediction of elastic parameters for wood, Wood science 5(4) (1973) 249 – 264 (1973).
- [8] E. K. Askenazi, Anizotropia dreveszinü i drevesznüh materialov, Lesznaja Promüslennoszty, Moscow, 1978 (1978).
- [9] Elastic moduli of veneers in pine and beech plywood, *Drewno. Pr. Nauk. Donies. Komunik.* 55 (2012) 47 – 58, structural and Physical Aspects of Construction Engineering (2012). doi:"<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.301>".
- [10] J. Szalai, A faanyag és faalapú anyagok anizotróp rugalmasság- és szilárdságtana. 1. rész, A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája, Erdészeti és Faipari Egyetem, Sopron, 1994 (1994).
- [11] R. Stürzenbecher, K. De Borst, J. Eberhardsteiner, Cross laminated timber: A multi-layer, shear compliant plate and its mechanical behavior, 11th World Conference on Timber Engineering 2010, WCTE 2010 (2010).
- [12] B. Heimeshoff, Zur berechnung von biegeträgern aus nachgiebig miteinander verbundenen querschnittsteilen im ingenieurholzbau, *Holz als Rohund Werkstoff* 45 (6) (1987) 237–241 (Jun 1987). doi:10.1007/BF02616416.
- [13] H. Kreuzinger, Platten, scheiben und schalen - ein berechnungsmodell für gängige statikprogramme, in: *Bauen mit Holz*, Vol. 1, Bruderverlag, Karlsruhe, 1999, pp. 34–39 (1999).
- [14] S. Timoshenko, Lxvi. on the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41 (245) (1921) 744–746 (1921). doi:10.1080/14786442108636264.
- [15] T. Bogensperger, T. Moosbrugger, G. Schickhofer, *BSPhandbuch, Holz-Massivbauweise in Brettsperrholz*, 1st Edition, Verlag der Technischen Universität Graz, 2009 (2009).
- [16] V. Bajzecerová, Bending Stiffness of CLT-Concrete Composite Members - Comparison of Simplified Calculation Methods, *Procedia Engineering* 190 (2017) 15–20 (2017). doi:10.1016/j.proeng.2017.05.301.
- [17] R. D. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* 18 (1) (1951) 31–38 (1951).
- [18] C. Czaderski, R. Steiger, M. Howald, S. Olia, A. Gülzow, P. Niemz, Versuche und berechnungen an allseitig gelagerten 3-schichtigen brettsperrholzplatten, *Holz als Roh- und Werkstoff* 65 (5) (2007) 383–402 (Oct2007). doi:10.1007/s00107-007-0184-6.

- [19] R. Stürzenbecher, K. Hofstetter, J. Eberhardsteiner, Structural design of cross laminated timber (clt) by advanced plate theories, *Composites Science and Technology* 70 (9) (2010) 1368 – 1379 (2010). doi:<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.04.016>.
- [20] N. Pagano, Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of Composite Materials* 4 (1) (1970) 20–34 (1970). doi:10.1177/002199837000400102.
- [21] V. G. Kirchhoff, Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe., *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850) 51–88 (1850). doi:<https://doi.org/10.1515/crll.1850.40.51>.
- [22] A. Thiel, G. Schickhofer, A software tool for designing cross laminated timber elements: 1d-plate-design., 11th World Conference on Timber Engineering, 2010 (2010).
- [23] F. Auricchio, E. Sacco, A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44 (10) (1999) 1481–1504 (1999). doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19990410)44:10<1481::AID-NME554>3.0.CO;2-Q.
- [24] M. Jacob, J. Harrington, B. Robinson, *The Structural Use of Timber - Handbook for Eurocode 5: Part 1-1.*, COFORD, Department of Agriculture, Food and the Marine, Dublin., 2018 (2018).
- [25] R. A. Jöbstl, G. Schickhofer, Comparative examination of creep of glt and clt slabs in bending, in: *WORKING COMMISSION W18 – TIMBER STRUCTURES*, Vol. 40, ., 2007, pp. 1–15 (2007).
- [26] M. Wallner-Novak, J. Koppelhuber, K. Pock, *Cross-laminated timber structural design - basic design and engineering principles according to eurocode*, Tech. rep., Stora Enso Wood Products GmbH.
- [27] A. Bernasconi, *Il calcolo dell'xlam - basi, normative, progettazione, applicazione*, Tech. rep., Promo Legno (2011).
- [28] *Design of timber structures - part 1-1: General - common rules and rules for buildings.*, norm (2004).
- [29] *Geometrische produktspezifikation (gps) - iso-toleranzsystem für längenmaße - teil 1: Grundlagen für toleranzen, abmaße und passungen (iso286-1:2010)* (Nov. 2010).
- [30] P. Mestek, H. Kreuzinger, S. Winter, *Design of cross laminated timber (clt)*.
- [31] A. Vilguts, D. Serdjuks, L. Pakrastins, Design methods of elements from cross-laminated timber subjected to flexure, *Procedia Engineering* 117 (2015) 10 – 19, international Scientific Conference Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (SPbUCEMF-2015) (2015). doi:<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.117>.