

# **AxisVM**

## ***AutoM<sub>cr</sub>***

### Przewodnik

Edited by: Inter-CAD Kft.  
Translated by: GammaCAD

©2020 Inter-CAD Kft.  
All rights reserved

™ All brand and product names are trademarks or registered trademarks.

## Spis treści

<b>1. PODSTAWY TEORETYCZNE.....</b>	<b>3</b>
1.1. WPROWADZENIE .....	3
1.2. PODPORY BOCZNE.....	4
<b>2. PRZYKŁADY .....</b>	<b>9</b>
2.1. BELKI .....	9
<b>3. WERYFIKACJA.....</b>	<b>14</b>
3.1. WALIDACJA Z PROGRAMEM LTBEAM I MODELAMI POWŁOKOWYMI .....	15
3.2. PODSTAWOWE PRZYPADKI Z METODY ANALITYCZNEJ WG ENV .....	19
3.3. RÓŻNICE POMIĘDZY AXISVM W WERSJI 12 ORAZ 13 .....	22
<b>4. BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>23</b>

# 1. PODSTAWY TEORETYCZNE

## 1.1. WPROWADZENIE

*AutoMcr* jest aplikacją użytą w module Wymiarowania Konstrukcji Stalowych (SD1), służącą do wyznaczania sprężystego momentu krytycznego (w skrócie *Mcr*). Aplikacja *AutoMcr* tworzy wyodrębniony model (submodel) zbudowany z elementów skończonych dla każdego wymiarowanego elementu stalowego. Następnie dla tego elementu rozwiązuje problem własny, który pozwala wyznaczyć wartość *Mcr*. Submodel składa się ze specjalnych prętowych elementów skończonych, dla których przypisana jest tylko taka liczba stopni swobody, która pozwala na określenie nośności krytycznej elementu zginanego (zwichrzenia):

- v        przemieszczenie boczne w kierunku lokalnej osi y;
- $\theta_x$     skręcenie; obrót wokół podłużnej osi belki (wokół lokalnej osi x);
- $\theta_z$     obrót wokół słabszej osi (wokół lokalnej osi z);
- w        spaczenie.

W trakcie tworzenia submodelu, program automatycznie identyfikuje podparcia boczne, które mogą być wyedytowane przez użytkownika. Składowe sztywności podparcia indeksowane są zgodnie z lokalnym układem współrzędnych submodelu:  $R_y$ ,  $R_{xx}$ ,  $R_{zz}$ ,  $R_w$ .

Aplikacja *AutoMcr* opiera się na tej samej teorii, co program LTBeam. Więcej informacji na temat założeń teoretycznych można przeczytać w artykule: Yvan Galea: Moment critique de deversement elastique de poutres flechies presentation du logiciel ltbeam [1].

Niniejszy przewodnik ma dwa główne cele. W Części 1 przedstawione przykłady mają pokazać możliwości i ograniczenia *AutoMcr*, jednocześnie pomagając użytkownikom prawidłowo korzystać z programu. Część 2 zawiera podsumowanie wyników modeli weryfikujących, w którym wyniki z *AutoMcr* porównano z wynikami z literatury i wynikami otrzymanymi w innych programach. Podstawowe informacje o aplikacji *AutoMcr* oraz instrukcja jej obsługi przedstawione są w podręczniku użytkownika AxisVM13 Przewodnik Użytkownika: 6.6.2. Projektowanie belek stalowych według Eurokodu.

Aplikacja *AutoMcr* umożliwia analizę prostoliniowych elementów o przekroju z przynajmniej jedną osią symetrii względem słabszej osi przekroju. Ponadto obsługuje:

- elementy ze zmiennym przekrojem zbudowanych, z co najmniej 30 elementów skończonych;
- wsporniki: nie ma potrzeby określania czy jest to wspornik czy nie, jak w AxisVM12;
- obciążenia mimośrodowe: odległość względem słabszej osi, uwzględniana jest jedna wartość dla wszystkich przypadków obciążenia na raz;
- mimośrodowe warunki podparcia: określane indywidualnie dla każdego podparcia.

Aplikacja *AutoMcr* pozwala na analizę tylko ciągłych elementów, dlatego wymiarowane elementy dzielone są w następujących dwóch przypadkach:

- belka o zmiennym (zbieżnym) przekroju: gdy część belki ma zmienny przekrój, a pozostała jej część jest o stałym przekroju;
- elementy z przegubem pośrednim.

## 1.2. PODPORY BOCZNE

Metoda *AutoMcr* za pomocą domyślnych ustawień określa automatycznie podpory boczne wymiarowanego elementu. Zostanie to szczegółowo opisane poniżej. Program znajduje nie tylko podpory, które zostały wcześniej zdefiniowane na modelu głównym, ale również elementy dochodzące do elementu wymiarowanego. Dochodzące elementy mogą być:

- prętem kratowym, prętem lub żebrem;
- elementami powierzchniowymi;
- elementami sztywnymi lub elementami łączącymi węzeł-węzeł.

Na podstawie właściwości tych elementów program wyznacza sztywność podpór bocznych. Więcej informacji znajduje się w Tabeli 2-3.

Podpory boczne mogą zostać zdefiniowane w oknie dialogowym *Parametry wymiarowania* (Rysunek 1), poprzez wciśnięcie przycisku [...], znajdującego się w obszarze zatytułowanym *Podpory boczne*. Po kliknięciu w przycisk [...] pojawi się okno *Podpory boczne* (Rysunek 2), w którym widoczne są przyłożone podpory boczne. Podpory te zależne są także od ustawień metody *AutoMcr*:

<i>Automatyczna</i>	ustawienia domyślne. Patrz Tabela 2-3
<i>Oszacowane na podstawie <math>k_z</math>, <math>k_w</math></i>	ustawienia na podstawie parametrów $k_z$ oraz $k_w$ zdefiniowanych przez użytkownika. Działa to na podobnej zasadzie co w AxisVM12, czyli położenie podpór bocznych i ich sztywności są szacowane na podstawie wspomnianych parametrów. Jeżeli użytkownik zaznaczy opcję „Wspornik”, wtedy podpory pojawiają się tylko na jednym końcu pręta ze składowymi sztywnościami $R_y$ , $R_{xx}$ oraz $R_{zz}$ . Patrz Tabela 1.
<i>Podpory widelkowe na obu końcach</i>	Na końcu elementu wymiarowanego zakładane są podpory boczne z zablokowanymi (sztywnymi) komponentami $R_y$ oraz $R_{xx}$ .
<i>Zdefiniowane przez użytkownika</i>	Uwzględniane są tylko podpory zdefiniowane przez użytkownika w oknie <i>Podpory boczne</i> .



Parametry wymiarowania - Eurokod [PL]

Material S 355  
Przekrój poprzeczny IPE 240

Metoda wymiarowania  
Według klasy przekroju (sprężyste / plastyczne)

Klasa przekroju  
 Automatyczna klasyfikacja  
 1  2  3  4

Element wymiarowany  
 Stężony w lok. pł. x-y Nieprzechyłowy  
 Stężony w lok. pł. x-z Przechyłowy

Skalanie elementów konstrukcyjnych  
   
 

Wskaźnik dla sił sejsmicznych  $f_{se} = 1$

Współczynniki wybooczeniowe  
 Wybooczenie giętkie  
 y Współczynnik wybooczeniowy  $K_y = 1,000$   
 z Współczynnik wybooczeniowy  $K_z = 1,000$

Zwiczenie

Pozycja obciążenia  
 Górne  
 Środek ciężkości  
 Dolne  
 Niestandardowy

Metoda obliczania  $M_{cr}$   
Auto Mcr

Podpory boczne  
 Automatyczna  
 Oszacowane na podstawie  $k_z, k_w$   
 Podpory widełkowe na obu końcach  
 Zdefiniowane przez użytkownika

Niestateczność środnika przy  
 Brak usztywnień  
 Usztywnienia poprzeczne

Pobierz z... >> OK Anuluj

Rysunek 1 Okno Parametry wymiarowania

13 Podpory boczne

Zaznaczone elementy wymiarowane

Nowy element wymiarowany (1-2) (Autom...

	Poz. [m]	Wzgl. poz. [-]	Mimośr. [mm]	$R_y$ [kNm]	$R_{yx}$ [kNm/rad]	$R_{yz}$ [kNm/rad]	$R_{\omega}$ [kNm <sup>3</sup> /rad]	
1	0	0	0	1E+10	1E+10	0	0	Podpora z modelu
2	2,000	0,286	0	7,03E+4	6,09E+2	0	0	Dochodzące elementy (IPE 160: a=6,00 m; (4-3)
3	5,000	0,714	0	7,03E+4	6,09E+2	0	0	Dochodzące elementy (IPE 160: a=6,00 m; (7-6)
4	7,000	1,000	0	1E+10	1E+10	0	0	Podpora z modelu

Nowy element wymiarowany - IPE 400

Węzły: 1 5 8 2  
Podpory: 1 2 3 4  
h=400mm  
L=7,000m

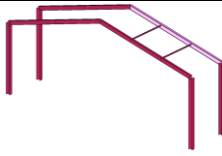
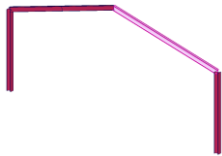
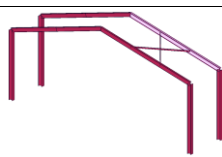
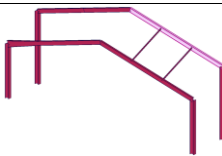
OK Anuluj

Rysunek 2. Okno Podpory boczne

**Tabela 1.** Podpory boczne wyznaczone na podstawie  $k_z$  oraz  $k_w$ 

		Podpora 1						Podpora 2					
	$k_z$	$k_w$	Poł. wzgl.	$R_y$	$R_{xx}$	$R_{zz}$	$R_w$	Poł. wzgl.	$R_y$	$R_{xx}$	$R_{zz}$	$R_w$	
	[-]	[-]	[-]	[kN/m]	[kNm/rad]	[kNm/rad]	[kNm <sup>3</sup> /rad]	[-]	[kN/m]	[kNm/rad]	[kNm/rad]	[kNm <sup>3</sup> /rad]	
Belka podparta na obu końcach	2 <		0	$10^{10}$		$10^7$		-					
		2 <	0		$10^{10}$		$10^7$	-					
	2		0	$10^{10}$		$10^{10}$		-					
		2	0		$10^{10}$		$10^{10}$	-					
	$1 < k_z < 2$		0	$10^{10}$		$10^{10}$		1	$10^{5*(2-k_z)}$		$10^{5*(2-k_z)}$		
		$1 < k_w < 2$	0		$10^{10}$		$10^{10}$	1		$10^{5*(2-k_w)}$		$10^{5*(2-k_w)}$	
	1	1	0	$10^{10}$	$10^{10}$	0	0	1	$10^{10}$	$10^{10}$	0	0	
	0.75		0	$10^{10}$		$10^7$		1	$10^{10}$		$10^7$		
		0.75	0		$10^{10}$		$10^7$	1		$10^{10}$		$10^7$	
	0.5		0	$10^{10}$		$10^{30}$		1	$10^{10}$		$10^{30}$		
		0.5	0		$10^{10}$		$10^{30}$	1		$10^{10}$		$10^{30}$	
	<0.5		0; 1	$10^{10}$		0		$1/k_z$ $2/k_z; \dots$	$10^{10}$		0		
	<0.5	0; 1		$10^{10}$		0	$1/k_w$ $2/k_w; \dots$		$10^{10}$		0		
Wspornik			0 lub 1	$10^{10}$	$10^{10}$	$10^{10}$	0						

**Tabela 2.** Podpory boczne wyznaczone automatycznie przez program na podstawie podpór i dochodzących elementów

Podpora lub podpierający element	$\alpha$	$\beta$	$R_y$	$R_{xx}$	$R_{zz}$	$R_w$	Przykład	Uwagi
	[°]	[°]	[kN/m]	[kNm/rad]	[kNm/rad]	[kNm <sup>3</sup> /rad]		
Podpora węzłowa zdefiniowana w modelu głównym	-	-	na podstawie sztywności podpory			0		Podczas wyznaczania $R_{zz}$ uwzględniane są zwolnienia węzłowe wymiarowanego elementu
Dochodzący pręt kratowy lub przegubowo przyłączona belka lub żebro	-	-	$EA/a$ *	0	0	0		
Dochodzący pręt lub żebro	$90 \pm 15$	$0 \pm 15$	$EA/a$ *	$2 \cdot EI/a$	0	0		El: sztywność dochodzącego elementu, a: długość dochodzącego elementu (zachowawczo zakłada się, że drugi koniec pręta jest podparty przegubowo)
	$90 \pm 15$	$90 \pm 15$	0	$2 \cdot EI/a$	0	0		
	$\neq 90 \pm 15$	$0 \pm 15$	0	0	0	0		Widoczne w tabeli okna <i>Podpory boczne</i> , w celu ewentualnej edycji przez użytkownika
	$90 \pm 15$	$\neq 0 \pm 15$	0	0	0	0		

\* jeżeli element wymiarowany nie jest stężony w swojej lokalnej płaszczyźnie x-y; w przeciwnym razie  $R_y = 0$  kN/m

**Tabela 3.** Podpory boczne wyznaczone automatycznie przez program – pozostałe elementy dochodzące

Podpora lub podpierający element	$\alpha$	$\beta$	$R_y$	$R_{xx}$	$R_{zz}$	$R_w$	Przykład	Uwagi
	[°]	[°]	[kN/m]	[kNm/rad]	[kNm/rad]	[kNm <sup>3</sup> /rad]		
Element powierzchniowy lub obszar (niezależnie od swojej sztywności i podparć)	$90 \pm 15$	$0 \pm 15$	$10^{10} *$	$10^{10}$	$10^{10}$	0	Podczas projektowania słupa płyta stropowa lub fundamentowa zapewnia sztywne podparcie	
	$0 \pm 15$	$90 \pm 15$	0	0	0	0		
	0	$\leq 45$	$10^{10} *$	$10^{10}$	$10^{10}$	0	Podczas projektowania belki płyta stropowa zapewnia ciągłe podparcie	
Element sztywny lub łączący typu węzeł-węzeł – podpora na drugim końcu	Na podstawie sztywności podparcia						Podczas wymiarowania belki z mimośrodowym podparciem	Mimośród podpory to długość elementu sztywnego;
Element sztywny lub łączący typu węzeł-węzeł – element liniowy na drugim końcu	Takie jak elementy prętowe						Podczas wymiarowania belki dochodzące elementy zapewniają mimośrodowe podparcie	Elementy łączące typu węzeł-węzeł są brane pod uwagę, gdy ich wartości sztywności (w odniesieniu do lokalnego układu elementu wymiarowanego) są: $K_y$ oraz $K_{xx} \geq 10^{10}$
Element sztywny lub łączący typu węzeł-węzeł – element powierzchniowy lub obszar na drugim końcu	Takie jak elementy powierzchniowe lub obszary						Podczas wymiarowania belki płyta stropowa dołączona za pomocą elementów sztywnych	

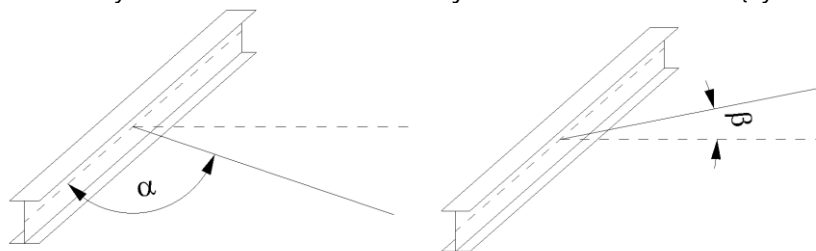
\* jeżeli element wymiarowany nie jest stężony w swojej lokalnej płaszczyźnie x-y; w przeciwnym razie  $R_y = 0$  kN/m

Oznaczenia

$\alpha$  najmniejszy kąt pomiędzy osią podłużną wymiarowanego elementu a osią dochodzącego elementu lub pł. dochodzącej powierzchni ( $0 \div 90^\circ$ )

$\beta$  najmniejszy kąt pomiędzy płaszczyzną poziomą wymiarowanego elementu a osią dochodzącego elementu lub pł. dochodzącej powierzchni ( $0 \div 90^\circ$ )

Przykład pomiaru powyższych kątów podczas wymiarowania belki dwuteowej z elementami dochodzącymi:

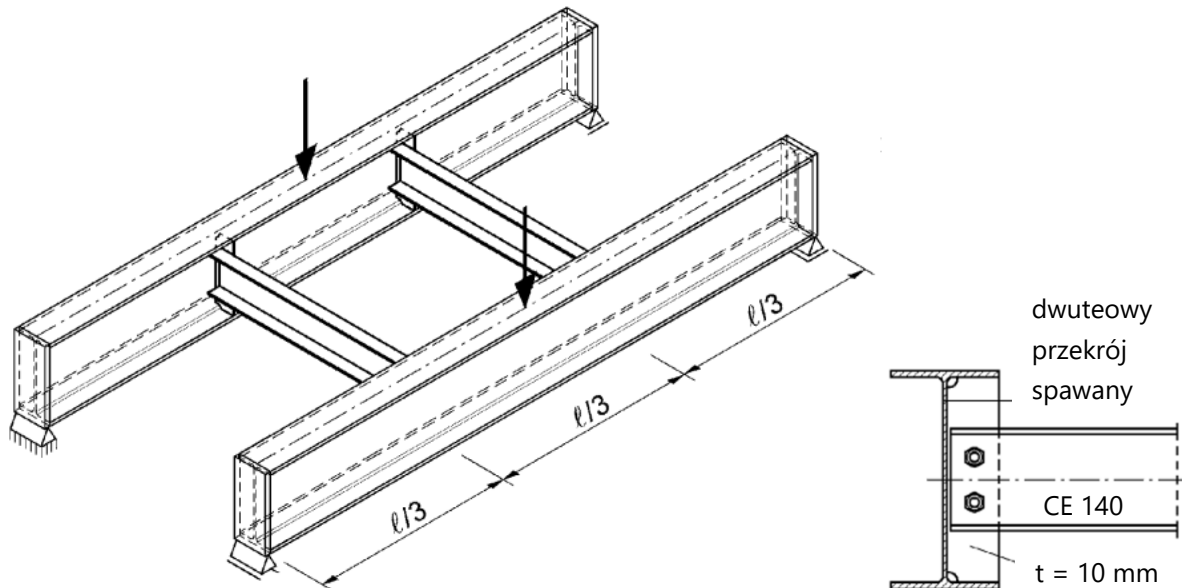




## 2. PRZYKŁADY

### 2.1. BELKI

W przypadku belek głównych pokazanych poniżej, zabezpieczenie przed zwichrzeniem w dwóch punktach pośrednich zrealizowane zostało przez dwie belki łączące. Belki łączące pełnią w tym przypadku rolę tężnika.



**Rysunek 3.** Belki główne połączone belkami usztywniającymi (tężnikami) i szczegół połączenia (źródło: [2])

Celem tego przykładu jest pokazanie:

- jak określić sztywność podparcia zapewnionego przez dochodzące belki,
- porównanie wartości  $M_{cr}$  uzyskanej z *AutoMcr* do wartości uzyskanej z modelu powłokowego i z programu LTBeam.

Konstrukcja przedstawiona w książce: *Teil 2 - Stabilität und Theorie II. Ordnung* [2] posłużyła, jako podstawa do tego przykładu. Prezentowany przykład pokaże sposób wyznaczania sztywności podparcia realizowanego przez belki łączące (tężniki).

#### Parametry:

- Przekrój poprzeczny [mm]:
  - belka główna: w celu porównania wyników z modelami powłokowymi przyjęto spawany, dwuteowy przekrój jak dla dwuteownika IPE 300:
    - środek: 300\*7 mm, pasy: 150\*11 mm;
  - belka dochodząca (tężnik): ceownik CE 140;
- Rozpiętość:
  - belka główna:  $l=6$  m;
  - belka dochodząca (tężnik):  $a=3$  m;

- Obciążenia: obciążenie równomierne na długości belki głównej lub obciążenie siłą skupioną przyłożoną w jej środku rozpiętości; obciążenie przyłożone w środku ciężkości lub do górnej półki;
- Warunki podparcia: podparcie belki głównej na jej końcach wg Rysunku 3 (jedna z dwóch belek głównych może swobodnie przemieszczać się prostopadle do swojej osi podłużnej);

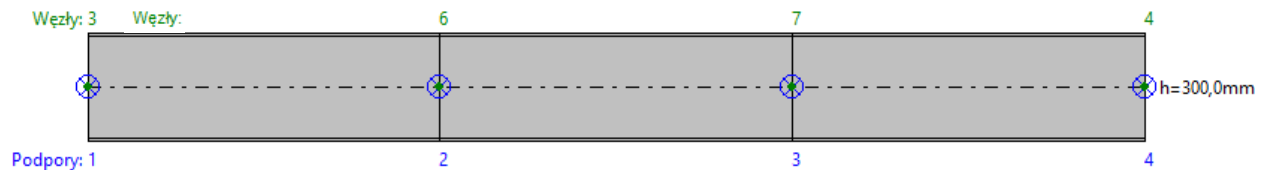
#### Nazwy modeli AxisVM:

- Model z prętowych elementów skończonych – *AutoMcr*  
Plik: *Girder - beam finite element model.axs*
- Model z powłokowych elementów skończonych, jako problem własny:  
Plik: *Girder - shell finite element model.axs*

#### Sztywność podparcia bocznego

Na końcach belek przyjęto podparcie widełkowe. W programie AxisVM13, gdy tworzony jest submodel na potrzeby *AutoMcr*, to automatycznie przyjmowane są podpory zdefiniowane wcześniej na zakładce *Elementy >> Podpory węzłowe*. Te podpory w submodelu *AutoMcr* są widoczne w tabeli w oknie dialogowym polecenia *Parametry wymiarowania >> Podparcia boczne*. Dla belki głównej przyjęte podpory przedstawione są na Rysunku 4, gdzie zarówno sztywność w kierunku prostopadłym do osi belki ( $R_y$ ) jak i sztywność obrotowa ( $R_{xx}$ ) jest przyjęta jako nieskończona (zablokowana).

	Poł. [m]	Wzgl. poł. [-]	Mimośr. [mm]	$R_y$ [kN/m]	$R_{xx}$ [kNm/rad]	$R_{zz}$ [kNm/rad]	$R_{\omega}$ [kNm <sup>3</sup> /rad]	Typ
1	0	0	0	1E+10	1E+10	1E+10	0	Podpora z modelu
2	2,000	0,333	0	1,29E+5	8,39E+2	0	0	Dochodzące elementy (UPE 140: a=3,00 m; (5-6); EI/a=420 kNm; EA/a=128929 kN/m; alfa=90°; beta=0°)
3	4,000	0,667	0	1,29E+5	8,39E+2	0	0	Dochodzące elementy (UPE 140: a=3,00 m; (8-7); EI/a=420 kNm; EA/a=128929 kN/m; alfa=90°; beta=0°)
4	6,000	1,000	0	1E+10	1E+10	1E+10	0	Podpora z modelu



**Rysunek 4.** Definicja podparć bocznych w programie AxisVM13

W tabeli powyżej, obok przyjętych podpór z modelu głównego (*Podpory z modelu*), uwzględnione zostały również belki łączące (*Dochodzące elementy*), które punktowo zabezpieczają belkę główną przed zwirzeniem. Program automatycznie przyjmuje szacunkowe wartości sztywności po kierunkach  $R_y$  oraz  $R_{xx}$  dla podpór:

$R_y = 10^{10}$  kN/m      jeżeli element wymiarowany jest stężony w swojej lokalnej płaszczyźnie x-y;  
w przeciwnym razie  $R_y = 0$  kN/m;

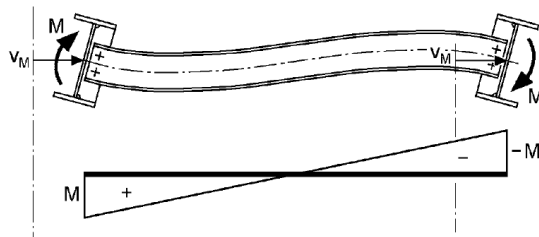
$R_{xx} = 2 \cdot EI/a$       na podstawie długości (a) i momentu bezwładności (I) dochodzącego elementu.

Zdefiniowanie tych wartości dokładnie leży po stronie odpowiedzialności użytkownika. Aby wyznaczyć sztywność wynikającą z dochodzącego elementu, można bazować na wytycznych przedstawionych w [2]:

sztwyłość obrotowa podparcia ( $R_{xx}$ ) może być wyznaczona przez obliczenie sztywności giętej belki dochodzącej ( $EI/a$ ). Wartość tej sztywności może być wyznaczana na podstawie poniższych dwóch wzorów, bazujących na deformacji konstrukcji:

#### Przypadek niesymetryczny

Belki główne przemieszczają się w bok i obracają się w tym samym kierunku. Belki łączące nie zapewniają żadnego podparcia bocznego ze względu na przesuw.



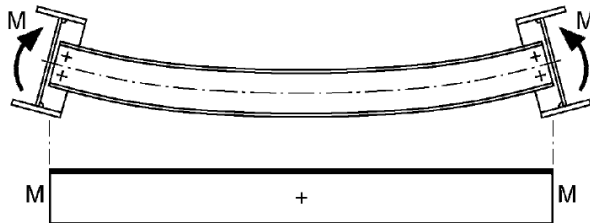
$$\begin{aligned} R_{xx} &= \mathbf{6 \cdot EI/a} = \\ &= 6 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 599.6 \text{ cm}^4 / 3 \text{ m} = \\ &= 2520 \text{ kNm/rad} \end{aligned}$$

$$R_y = R_{zz} = R_w = 0$$

**Rysunek 5.** Możliwa deformacja konstrukcji: przypadek niesymetryczny (źródło: [2])

#### Przypadek symetryczny

Belki główne nie doznają przemieszczenia bocznego, ale obracają się w przeciwnych kierunkach. Belki łączące zapewniają częściowe podparcie boczne.



$$\begin{aligned} R_{xx} &= \mathbf{2 \cdot EI/a} = \\ &= 6 \cdot 21000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 599.6 \text{ cm}^4 / 3 \text{ m} = \\ &= 840 \text{ kNm/rad} \end{aligned}$$

$$R_y > 0$$

$$R_{zz} = R_w = 0$$

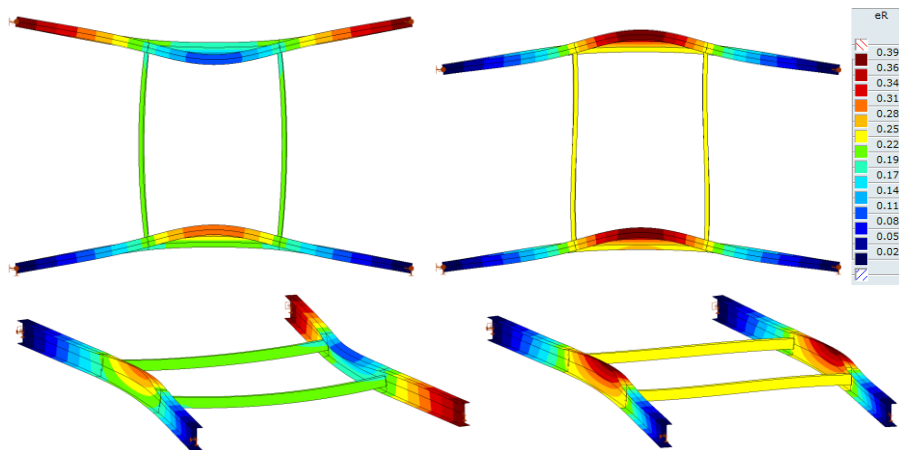
**Rysunek 6.** Możliwa deformacja konstrukcji: przypadek symetryczny (źródło: [2])

W rzeczywistości, połączenia podatne (ang. *semi-rigid*) oraz dystorsje przekroju belek głównych mogą obniżać powyższe sztywności podparć. Aby pozostać po bezpiecznej stronie, program bazuje na drugim przypadku.. W niniejszym przykładzie zaprezentowane będą oba przypadki, zaś w drugim pominięta zostanie składowa  $R_y$ .

## Porównanie wyników

Otrzymane wartości  $M_{cr}$  zostaną porównane z wynikami otrzymanymi z modelu powłokowego, utworzonego w programie AxisVM13 oraz z wynikami z programu LTBeam, który bazuje na tych samych założeniach, co aplikacja *AutoMcr*. Modele zdefiniowane w LTBeam (v1.0.10) mają te same ustawienia. Różnice w otrzymanych wynikach wynikają z zastosowanych algorytmów i różnic w dyskretyzacji modelu.

Modele powłokowe w AxisVM13 zostały utworzone za pomocą polecenia *Edycja >> Konwertuj pręt na model powłokowy*. Po zdefiniowaniu obciążenia, rozwiązany został problem własny (zakładka *Wyboczenie*), który określił mnożnik obciążenia krytycznego.  $M_{cr}$  może zostać obliczony przez przemnożenie współczynnika obciążenia krytycznego przez maksymalny moment na długości danego elementu. W porównaniu do modeli prętowych, modele powłokowe pozwalają na dokładniejsze i bardziej szczegółowe modelowanie, dlatego otrzymany  $M_{cr}$  jest bliższy prawdzie. Kolejną przewagą modeli powłokowych związana jest z brakiem konieczności tworzenia submodelu, co eliminuje błędy związane z definiowaniem podparcia bocznego. Wadą tego podejścia jest jego złożoność i dłuższy czas obliczeń numerycznych. Czas obliczeń w przypadku procedury *AutoMcr* jest około 100-krotnie krótszy od czasu obliczeń dla odpowiadającego modelu powłokowego. Aby uniknąć lokalnych deformacji w modelu powłokowym, środnik belki głównej w miejscu przecięcia się belek został usztywniony elementami sztywnymi (bardziej precyzyjne rozwiązanie w postaci modelowania żeberek nie jest konieczne). Najniższa postać własna otrzymana została dla przypadku symetrycznego, kolejna dla przypadku niesymetrycznego (Rysunek 7).



**Rysunek 7.** Postacie własne wyboczenia modeli powłokowych: z lewej przypadek symetryczny, z prawej przypadek niesymetryczny [mm]

### Wyniki [kNm]

W Tabeli 4 kolumny oznaczone „ $\Delta$ ” pokazują procentową różnicę między wartością sprężystego momentu krytycznego otrzymanego z aplikacji *AutoMcr* ( $M_{AutoMcr}$ ) a wartością otrzymaną z programu LTBeam i z modelu powłokowego, na podstawie zależności  $\Delta = (M_{AutoMcr} - M_{cr}) / M_{cr}$ .

Tabela 4. Zestawienie wyników

Typ obciążenia	Położenie obciążenia	Deformacja	<i>AutoMcr</i>	LTBeam	$\Delta$	Model powłokowy	$\Delta$
Równomiernie rozłożone	Górna półka	Niesymetryczna	597	596	0%	644	-8%
		Symetryczna	554	554	0%	581	-5%
	Środek ciężkości	Niesymetryczna	625	624	0%	619	1%
		Symetryczna	578	577	0%	558	3%
Siła skupiona	Górna półka	Niesymetryczna	628	629	0%	624	1%
		Symetryczna	569	569	0%	566	1%
	Środek ciężkości	Niesymetryczna	702	702	0%	669	5%
		Symetryczna	639	639	0%	610	5%

Porównując wyniki z programem LTBeam, można zauważyć, że metoda *AutoMcr* jest dokładna. Stwierdzić można ponadto, że wyniki otrzymane z modelu powłokowego i modelu prętowego (*AutoMcr*) są zgodne, zatem przyjęte wartości sztywności podparć są wystarczająco dokładne.

### 3. WERYFIKACJA

W tej części przedstawiono podsumowanie weryfikacji *AutoMcr*. Otrzymane wartości  $M_{cr}$  zostały porównane z wartościami otrzymanymi innymi metodami i programami, wśród których program LTBeam bazuje na identycznych założeniach teoretycznych, co aplikacja *AutoMcr*. W pierwszej części, modele LTBeam i modele powłokowe zostały zaczerpnięte z dokumentacji weryfikującej dla programu LTBeam: *Yvan Galea: LTBeam – Report on Validation Tests* [3]. Następnie przeprowadzono porównanie z podejściem analitycznym, przedstawionym w normie ENV [4]. Na koniec zestawiono różnice między aplikacją *AutoMcr* zastosowaną w AxisVM 12 oraz AxisVM 13.

Różnica ( $\Delta$ ) dla wyników otrzymanych z aplikacji *AutoMcr* ( $M_{AutoMcr}$ ) względem wartości ( $M_{cr}$ ) otrzymanej dla pozostałych metod, obliczona została zgodnie z równaniem:  $\Delta = (M_{AutoMcr} - M_{cr}) / M_{cr}$ .

### 3.1. WALIDACJA Z PROGRAMEM LTBEAM I MODELAMI POWŁOKOWYMI

#### Modele powłokowe w programie Ansys

Na podstawie Rozdziału 2 z [3].

W tej części przedstawiono proste przykłady wszystkich typów modeli, które mogą być policzone za pomocą aplikacji *AutoMcr*. Wyniki porównano z wynikami otrzymanymi w programie LTBeam i wynikami z modeli powłokowych w programie Ansys [3] - patrz Tabele 5-6. Wartości  $M_{cr}$  różnią się nieznacznie (-4÷3%), co jest bardzo dobrym rezultatem.

Nazwa modelu AxisVM: *LTBeam Validation - Chapter 2 - #.axs* (gdzie # jest numerem przykładu)

Tabela 5. Zestawienie wyników cz. I.

Typ przykładu	Nr #	1x sym. c.s.	Mimoś. obc.	Auto	LTBeam		Ansys		Uwagi	
				M <sub>cr</sub>	M <sub>cr</sub>	Δ	M <sub>cr</sub>	Δ		
				[kNm]	[kNm]	[%]	[kNm]	[%]		
ZMIENNY przekrój	40			188	186	-0.7	188	0.3		
	41			156	155	-0.7	157	0.4		
BELKA CIĄGŁA: podparcie boczne w środku rozpiętości	50			275	274	-0.4	274	-0.4	Parametr <i>Scalenie elementów konstrukcyjnych</i> : wyniki są dokładniejsze, gdy belka modelowana jest w całości	
	51			293	288	-1.6	288	-1.6		
	52			343	338	-1.5	338	-1.5		
	53			254	255	0.3	255	0.3		
	54			212	210	-0.8	210	-0.8		
	55	x		160	160	0.3	160	0.3		
	56			130	129	-0.9	129	-0.9		
	57			184	184	0.3	184	0.3		
58			157	156	-0.6	156	-0.8			
WSPORNIK: różne warianty przyłożenia obciążenia: górna półka, środek ścinania, dolna półka	60		x	180	184	1.7	185	2.4		
				233	233	0.2	234	0.6		
			x	268	267	-0.3	268	-0.1		
	61		x	292	300	2.6	300	2.6		
				421	424	0.7	422	0.2		
			x	538	536	-0.3	532	-1.1		
	62		x	282	290	2.7	291	3.2		
				424	425	0.4	425	0.3		
			x	529	527	-0.4	525	-0.7		
	65			x	119	121	1.4	121	1.8	
					132	133	0.2	133	0.5	
				x	155	157	1.0	157	0.9	
				x	190	193	1.8	193	1.6	
	66	x			223	224	0.7	223	0.3	
				x	298	305	2.3	303	1.5	
				x	184	188	2.3	189	2.5	
67				220	221	0.4	221	0.3		
			x	285	290	1.6	288	1.0		



Tabela 6. Zestawienie wyników cz. II.

Typ przykładu	Nr #	1x sym. c.s.	Mimoś. obc.	LTBeam			Ansys		Uwagi
				Auto Mcr	M <sub>cr</sub>	Δ	M <sub>cr</sub>	Δ	
				[kNm]	[kNm]	[%]	[kNm]	[%]	
PROSTA BELKA: różne warunki podparcia	70			150	149	-0.5	149	-0.7	
	71			530	523	-1.4	523	-1.2	
	72			361	358	-0.9	358	-0.9	
	75			105	105	-0.4	105	-0.4	
	76	x		264	264	0.1	263	-0.4	
	77			223	222	-0.3	221	-0.7	
BELKA SWOBODNIE PODPARTA: podparcia boczne w środku rozpiętości	80			854	853	-0.1	847	-0.9	Pośrednie podparcia boczne mogą być zdefiniowane bezpośrednio w modelu programu AxisVM i przyjmowane są wtedy automatycznie przez AutoMcr – lub w oknie „Podparcia boczne”
	82			625	625	0.1	622	-0.4	
	83			1265	1230	-2.9	1220	-3.7	
	84		x	625	622	-0.4	622	-0.4	
				579	577	-0.3	577	-0.3	
		x	359	363	1.2	363	1.2		
	85			477	478	0.1	476	-0.2	
	86			299	300	0.2	299	-0.1	
	87			344	345	0.1	344	-0.1	
	88		x	432	432	-0.1	431	-0.4	
				403	403	0.1	402	-0.1	
		x	377	378	0.4	378	0.1		
89			330	324	-1.7	323	-1.9	Podparcie ciągłe: w AutoMcr może być zdefiniowane tylko, jako ciąg pojedynczych podparć	
90			319	314	-1.5	313	-1.8		
91		x	315	309	-1.7	310	-1.6		
92	x		225	224	-0.4	223	-0.5		
PRZEKRÓJ TEOWY: swobodnie podparty	100			17.7	17.8	0.6	17.8	0.7	
	101			15.1	15.1	-0.3	15.1	-0.2	
	102		x	15.6	15.7	0.7	15.8	1.0	
	103			13	13.0	-0.1	13.0	0.3	

Zmienny przekrój poprzeczny

Na podstawie Rozdziału 5 z [3].

Analizowana belka posiada: zmienną wysokość środnika ( $h_{w1} \div h_{w2}$ ), podparcie widełkowe na końcach, obciążona jest momentami skupionymi na końcach ( $M_1$  i  $M_2$ ). Wyniki są od +2% do -9% różne od wyników z programu LTBeam i Finelg [3]. Różnice te wynikają z różnej dyskretyzacji przekrojów i są pomijalne z uwagi na ogólną niepewność modelowania zmiennych przekrojów.

Nazwa modelu AxisVM: LTBeam Validation - Chapter 5 - Variable cross-section.axs

**Tabela 7.** Porównanie wyników dla belki ze zmiennym przekrojem

Nr modelu	L	hw1	hw2	M1	M2	AutoMcr	LTBeam		Finelg	
						M <sub>cr</sub>	M <sub>cr</sub>	Δ	M <sub>cr</sub>	Δ
	[m]	[mm]	[mm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	%	[kNm]	%
P1-1A	5	400	800	200	-800	3498	3591	2.6	3586	2.4
P1-2A					-600	3718	3817	2.6	3811	2.4
P1-3A					400	2012	2064	2.5	2062	2.4
P1-4A					600	2253	2311	2.5	2308	2.4
P1-5A					800	2391	2453	2.5	2450	2.4
P1-6A					200	1501	1541	2.6	1539	2.5
P3-1A	5	200	1000	200	-1200	3599	3365	-6.9	3361	-7.1
P3-4A					1000	2674	2483	-7.7	2480	-7.8
P3-6A					200	1579	1455	-8.5	1454	-8.6
P1-1A	10	400	800	200	-800	1173	1189	1.3	1189	1.3
P1-6A					200	510	520	2.0	521	2.0
P3-1A	10	2000	1000	200	-1200	1169	1137	-2.8	1138	-2.8

### 3.2. PODSTAWOWE PRZYPADKI Z METODY ANALITYCZNEJ WG ENV

W celu określenia wartości  $M_{cr}$ , program AxisVM od dawna korzystał z tzw. "formuły 3 współczynników", która znajduje się w prenormie Eurokodu [4] (w dalszej części nazywana ENV). Wspomniana formuła 3 współczynników „C” wykorzystuje dodatkowo współczynniki  $k_z$  i  $k_w$ , będące współczynnikami długości efektywnych. Zalecane wartości dla tych wszystkich współczynników można znaleźć w literaturze tylko dla podstawowych przypadków, a w niektórych przypadkach dają różne rezultaty. Aby wyznaczyć współczynnik  $C_1$ , Lopez (i inni) zaproponował prostą, analityczną formułę, którą zaimplementowano w programie AxisVM. Formuła została skalibrowana na podstawie wyników numerycznych dla kilku warunków podparcia i obciążenia.

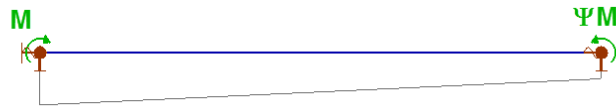
W Tabeli 8 przedstawiono podsumowanie i porównanie wyników *AutoMcr* z analitycznym podejściem prenormy ENV dla współczynników przyjętych z różnych źródeł. Wszystkie przykłady obejmowały belki swobodnie podparte na końcach, obciążone i podparte na wysokości środka ścinania, o przekroju z pojedynczą lub podwójną osią symetrii, z różnymi wartościami współczynników długości efektywnej.

Wartości  $k_z$  i  $k_w$  przyjęto zgodnie z [5], jako równe. Dodatkowo obok współczynników dla belek z podporami przegubowymi i utwierdzonymi, w [5] podane są wartości współczynników dla trzeciego typu podparcia tj. podparcia podatnego: odpowiada to przypadkowi, kiedy  $k$  przyjmuje wartość 0,7. Informacja dla trzeciego typu podparcia zawarta w [5] z punktu widzenia aplikacji *AutoMcr* jest niewystarczająca, stąd dla tego podparcia rozpatrzono trzy ustawienia współczynników. Wartość  $k=0,7$  odpowiada belce, która na jednym końcu jest w pełni zamocowana a na drugim przegubowo i dla takich ustawień została przyjęta najmniejsza możliwa wartość  $M_{cr}$ . W dwóch pozostałych przypadkach,  $k_z$  lub  $k_w$  przyjmuje wartość 0,5, a odpowiedni drugi współczynnik przyjmuje wartość 1,0, co odpowiada sytuacji często spotykanej w praktyce. W Tabeli 8 zestawiono rozpatrywane warunki podparcia (składowe podparcia nieuwzględnione w tej Tabeli są przyjęte jako zerowe w *AutoMcr*).

**Tabela 8.** Warunki podparcia bocznego w odniesieniu do różnych metod

Warunki podparcia	ENV		<i>AutoMcr</i>	
	$k_z$	$k_w$	Lewa podpora	Prawa podpora
Przegubowe	1	1	$R_y = R_{xx} = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = 10^{10}$
Podatne	0,7	0,7	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = R_w = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = 10^{10}$
	0,5	1	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = 10^{10}$
	1	0,5	$R_y = R_{xx} = R_w = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = R_w = 10^{10}$
Zamocowanie	0,5	0,5	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = R_w = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = R_w = 10^{10}$

## Obciążenie tylko momentami na końcach



Rozpiętość: L=8m

**Rysunek 8.** Obciążenie tylko momentami na końcach

Przekrój poprzeczny: symetryczny, spawany (wielkość ścianek odpowiada przekrojowi IPE 300)

Nazwa modelu AxisVM: Basic cases – End moments – Symmetric cross-section.axs

**Tabela 9.** Porównanie analitycznych i numerycznych wyników, obciążenie tylko momentami na końcach

Stosunek momentów na końcach	Wsp. efekt. długości		Auto Mcr	Wzór ENV [4], współczynniki C [5]						Wzór ENV [4], wsp. C <sub>1</sub> wg Lopez [6]			Access Steel [7]			LTBeam v1.0.10		Abaqus [8]		
	$\Psi$	k <sub>z</sub>		k <sub>w</sub>	M <sub>cr</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	M <sub>cr</sub>	$\Delta$	C <sub>1</sub>	M <sub>cr</sub>	$\Delta$	C <sub>1</sub>	M <sub>cr</sub>	$\Delta$	M <sub>cr</sub>	$\Delta$	M <sub>cr</sub>	$\Delta$
[-]	[-]	[-]	[kNm]	[-]	[-]	[-]	[kNm]	[%]	[-]	[kNm]	[%]	[-]	[kNm]	[%]	[kNm]	[%]	[kNm]	[%]	[kNm]	[%]
1	1	1	57	1			57	0	1	57	0	1	57	0	57	0	57	0		
	0.7	0.7	91	1			91	0	1	91	0				91	0				
	0.5	1	126	1	-	-	114	11	1	114	11				126	0				
	1	0.5	84	1			75	12	1	75	12				84	0				
	0.5	0.5	150	1			150	0	1	150	0				150	0				
0.5	1	1	75	1.323			75	0	1.301	74	1	1.31	75	0	75	0				
	0.7	0.7	110	1.473			134	-18	1.302	119	-8				110	0				
	0.5	1	165	1.473	-	-	168	-2	1.301	148	11				165	0				
	1	0.5	111	1.473			111	0	1.301	98	13				111	0				
	0.5	0.5	198	1.514			227	-13	1.305	196	1				198	0				
0	1	1	104	1.879			107	-3	1.78	102	2	1.77	101	3	104	0				
	0.7	0.7	134	2.092			191	-30	1.785	163	-18				134	0				
	0.5	1	226	2.092	-	-	239	-5	1.782	203	11				226	0				
	1	0.5	157	2.092			157	0	1.782	134	17				157	0				
	0.5	0.5	275	2.15			323	-15	1.803	271	1				275	0				
-0.5	1	1	143	2.704			154	-7	2.397	137	4	2.33	133	8	143	0				
	0.7	0.7	163	3.009			275	-41	2.499	228	-29				163	0				
	0.5	1	288	3.009	-	-	343	-16	2.472	282	2				289	0				
	1	0.5	227	3.009			226	0	2.472	186	22				227	0				
	0.5	0.5	375	3.093			465	-19	2.679	402	-7				375	0				
-1	1	1	154	2.752			157	-2	2.449	140	10	2.55	140	10	154	0	153	1		
	0.7	0.7	190	3.063			279	-32	2.652	242	-21				190	0				
	0.5	1	271	3.063	-	-	349	-22	2.599	296	-8				271	0				
	1	0.5	268	3.063			230	17	2.599	195	37				268	0				
	0.5	0.5	378	3.149			473	-20	3.024	454	-17				378	0				






W Tabeli 9 wykazano, że różne metody dają znacząco różne wyniki. We wszystkich przypadkach wyniki z aplikacji *AutoMcr* i programu *LTBeam* są sobie bliskie.

- W przypadku przegubowo podpartych belek, wyniki są zawsze bardzo zbliżone dla wszystkich metod.
- W przypadku belek zamocowanych, wyniki analityczne wg ENV z wartością współczynnika C<sub>1</sub> wg Lopeza [6] są najbliższe wartościom z procedury *AutoMcr*, (głównie, gdy  $\Psi > 0$ ).
- Różnice pomiędzy metodami dla podatnego podparcia wynikają z różnych definicji warunków brzegowych.

## Obciążenie poprzeczne

Nazwa modelu AxisVM: Basic cases – Transverse loading – Symmetric cross-section.axs

**Tabela 10.** Porównanie wyników analitycznych i numerycznych, obciążenie poprzeczne

Rozkład momentów	Wsp. efekt. długości	Auto Mcr	Wzór ENV [4], wzór C wg [5]					Wzór ENV [4], wsp. C <sub>1</sub> wg Lopeza [6]		
	k	M <sub>cr</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	M <sub>cr</sub>	Δ	C <sub>1</sub>	M <sub>cr</sub>	Δ
	[-]	[kNm]	[-]	[-]	[-]	[kNm]	[%]	[-]	[kNm]	[%]
obciążenie równomierne 	1	135	1.132	0.459	0.525	134	-1	1.129	134	-1
	0.5	291	1	0.304	0.478	290	0	1.014	302	4
obciążenie równomierne 	1	315	2.576	1.562	0.753	305	-3	2.408	285	<b>-11</b>
	0.5	524	1.494	0.652	1.07	446	<b>-17</b>	1.908	569	8
siła skupiona 	1	161	1.365	0.553	0.411	162	1	1.247	148	-9
	0.5	318	1.07	0.432	0.338	319	0	1.03	307	-4
siła skupiona 	1	203	1.565	1.267	2.64	185	-10	1.382	164	<b>-24</b>
	0.5	313	0.938	0.715	4.8	280	<b>-12</b>	1.037	309	-1
para sił skupionych 	1	130	1.046	0.43	0.562	124	-5	1.124	133	2
	0.5	277	1.01	0.41	0.539	301	8	1.013	302	8

### 3.3. RÓŻNICE POMIĘDZY AXISVM W WERSJI 12 ORAZ 13

W programie AxisVM12, gdy definiowany jest submodel, warunki podparcia są przyjmowane na podstawie zdefiniowanych przez użytkownika współczynników  $k_z$  i  $k_w$ . Otrzymane wartości  $M_{cr}$  są zbliżone do wartości otrzymanych w programie AxisVM13 w przypadkach podstawowych ( $k=0,5$  lub  $k=1,0$ ), natomiast nieznacznie różnią się, gdy zachodzi nierówność  $k_z \neq k_w$ .

Kolejną ważną różnicą jest to, że w wersji 13 spełniając wymagania bezpiecznego projektowania, w przypadku belek zamocowanych na końcach, procedura *AutoMcr* automatycznie zakłada  $R_y=R_{xx}=R_{zz}=10^{10}$ , podczas gdy sztywność  $R_w$  musi być określona przez użytkownika. W wersji 12, jeżeli  $k_z=k_w=0,5$ ,  $R_w$  przyjmowano również, jako sztywne.

**Tabela 11.** Warunki podparcia bocznego

Typ podpór	Współczynniki długości efektywnych		Sztywności podparcia bocznego	
	$k_z$	$k_w$	AxisVM12	AxisVM13 podstawowe ustawienia
przegubowe	1,0	1,0	$R_y = R_{xx} = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = 10^{10}$
utwierdzone	0,5	0,5	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = R_w = 10^{10}$	$R_y = R_{xx} = R_{zz} = 10^{10}$

Metoda *AutoMcr* w AxisVM13 jest numerycznie bardziej precyzyjna niż w wersji 12. Wartości  $M_{cr}$  różnią się maksymalnie do  $\pm 10\%$ . W przypadku pierwszego otworzenia modelu wersji 13 (stworzonego i zapisanego wcześniej w wersji 12), definicje podparć pozostają takie same jak w wersji 12, lecz  $M_{cr}$  jest liczony bardziej precyzyjnym algorytmem. W takim przypadku w oknie dialogowym *Parametry Wymiarowania Stali* przy metodzie obliczania  $M_{cr}$  pojawi się informacja: „AutoMcr\_v12”. Zalecana jest w takim przypadku konwersja modelu i redefinicja jego podparć bocznych, aby przeprowadzić dokładniejsze wymiarowanie elementu stalowego.

## 4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Yvan Galea: Moment critique de deversement elastique de poutres flechies presentation du logiciel Itbeam, CTICM, [www.cticm.com](http://www.cticm.com), 2003 (in French)
- [2] Stahlbau: Teil 2 - Stabilität und Theorie II. Ordnung, 10.4 Stabilisierung durch behinderung der verdrehungen, szerző: Rolf Kindmann, Ernst&Sohn, 4<sup>th</sup> edition, pp. 336-338., 2008 (in German)
- [3] Yvan Galea: LTBeam – Report on Validation Tests, CTICM, July 2002, [www.cticm.com](http://www.cticm.com)
- [4] ENV 1993-1-1: Appendix F
- [5] Ádány, Dulácska, Dunai, Ferneszely, Horváth: Acélszerkezetek, 1. Általános eljárások, Tervezés az Eurocode alapján, 2006 (in Hungarian)
- [6] López, Yong, Serna: Lateral-torsional buckling of steel beams: A general expression for the moment gradient factor. Proceedings of the International Colloquium of Stability and Ductility of Steel Structures, D. Camotim et al. Eds., Lisbon, Portugal, September 6-8, 2006.
- [7] Access Steel: NCCI: Elastic critical moment for lateral torsional buckling, SN003a-EN-EU, 2008
- [8] Braham M. – "Le déversement élastique des poutres en I à section monosymétrique soumises à un gradient de moment de flexion" – Revue Construction Métallique n°1-2001 – CTICM (in French)