

AxisVM

AutoN_{cr}

Automatyczne wyznaczanie współczynnika wyboczenia giętnego w programie AxisVM

opis działania z przykładami

Edited by: Inter-CAD Kft.
Translated by: GammaCAD

©2020 Inter-CAD Kft.
All rights reserved

™ All brand and product names are trademarks or registered trademarks.

Maj 2016

Spis treści

1. WPROWADZENIE	3
2. CELE I ZAKRES	4
3. METODOLOGIA	6
4. PRZYKŁADY POJEDYNCZYCH ELEMENTÓW	11
4.1. SŁUP Z PODPORAMI TYLKO NA KOŃCACH	13
4.1.1. SŁUP SWOBODNIE PODPARTY	13
4.1.2. UTWIERDZONY SŁUP RAMY PRZECZYŁOWEJ	14
4.1.3. WSPORNIK (SZTYWNE ZAMOCOWANIE)	16
4.1.4. WSPORNIK (ZAMOCOWANIE PODATNE)	17
4.1.5. DOKŁADNOŚĆ NARZĘDZIA <i>AUTON_{CR}</i> PRZY ANALIZIE POJEDYNCZYCH SŁUPÓW	18
4.2. SŁUP Z WIELOMA PODPORAMI	20
4.2.1. ŚCISKANIE OSIOWE, PODPARCIE W POŁOWIE WYSOKOŚCI	20
4.2.2. PODPARCIE POŚREDNIE, ODCINKOWO STAŁA ŚCISKAJĄCA SIŁA OSIOWA	21
4.2.3. PODPARCIE W KILKU PUNKTACH	24
4.2.4. ZŁOŻONY ZESTAW PODPÓR Z ODCINKOWO STAŁYM OBCIĄŻENIEM OSIOWYM	25
4.2.5. DOKŁADNOŚĆ: ODCINKOWO STAŁA SIŁA ŚCISKAJĄCA I RÓŻNE DŁUGOŚCI WZGLĘDNE	26
4.2.6. OGRANICZENIA STOSOWANIA: NIERÓWNOMIERNE OBCIĄŻENIE OSIOWE	28
4.2.7. OGRANICZENIA STOSOWANIA: ODCINKOWO ZMIENNY PRZEKRÓJ SŁUPA	29
4.3. SŁUPY PODPARTE PRZEZ INNE ELEMENTY	33
4.3.1. PROSTA BELKA JAKO PODPORA	33
4.3.2. ŚCISKANA BELKA PODPIERAJĄCA	34
4.3.3. NACHYLONA BELKA PODPIERAJĄCA	36
4.3.4. DOKŁADNOŚĆ: NACHYLONA BELKA PODPIERAJĄCA	38
4.3.5. OGRANICZENIA STOSOWALNOŚCI: BELKA PODPIERAJĄCA O ZMIENNEJ LINIOWO SZTYWNOŚCI	38
5. PRZYKŁAD UKŁADU KONSTRUKCYJNEGO	40
6. PODSUMOWANIE	45
7. BIBLIOGRAFIA	46

1. WPROWADZENIE

Znaczące zwiększenie dostępnych zasobów obliczeniowych pociąga za sobą fundamentalne zmiany w stosowanych metodologiach projektowania konstrukcji. Inżynierowie konstruktorzy oczekują nie tylko bardziej efektywnych obliczeń, ale również „mądrzejszego” oprogramowania, które umożliwi wykonanie automatycznie większej liczby zadań. Zautomatyzowane projektowanie jest szybsze, lecz nie zawsze ekonomiczniejsze od projektowania tradycyjnego. Ekonomiczność rozwiązań konstrukcyjnych silnie zależy od przyjętej metodologii oraz przyjętych danych wejściowych. W przypadku gdy zadanie projektowe wykracza poza ramy przyjętej metodologii lub przyjęte zostały niewłaściwe założenia, otrzymane wyniki mogą być obciążone błędem. Należy zauważyć, że błąd ten niekoniecznie znajduje się po bezpiecznej stronie, co może mieć tragiczne konsekwencje.

Popularnym obszarem automatyzacji obliczeń inżynierskich jest znormalizowana weryfikacja nośności elementów konstrukcyjnych. W Europie polega to zwykle na weryfikacji wytrzymałości i stateczności elementu zgodnie z normami Eurokodu. Część parametrów wymaganych do przeprowadzenia tych weryfikacji może być uzyskana bezpośrednio z modelu konstrukcji (np.: wymiary przekroju poprzecznego, długość elementu, właściwości materiału itd.). Pozostałe parametry muszą być podane przez użytkownika (np.: punkt przyłożenia obciążenia, schemat zbrojenia elementów żelbetowych, wielkość i szczegóły połączenia, itd.). Określenie parametrów definiowanych przez użytkownika (np. współczynnik wyboczenia giętnego) często związane jest oceną inżynierską i informacjami niedostępnymi w modelu konstrukcji. Dlatego trudno jest zastąpić parametry wprowadzane przez użytkownika, wiarygodnymi obliczeniami automatycznymi.

Wprawdzie niektóre oprogramowania do projektowania konstrukcji oferują automatyczne wyznaczanie współczynnika wyboczenia giętnego, to jego zakres jest często ograniczony do podstawowych przypadków. Użytkownicy nieświadomi tych ograniczeń są narażeni na popełnienie istotnych błędów w swoich projektach. Narzędzie do automatycznego wyznaczania współczynnika wyboczenia giętnego dostępne w AxisVM (w dalszej części przewodnika nazywane *Narzędzie AutoNcr*) zostało opracowane ze szczególnym naciskiem na zapewnienie dużego zakresu działania i przejrzystości obliczeń. Następny rozdział tego opracowania wyjaśnia zakres i cele *Narzędzia AutoNcr*. Dzięki temu użytkownicy AxisVM mogą zdecydować w czym i kiedy będzie to pomocne. Kolejny rozdział o metodologii wyjaśnia algorytm obliczeń, w celu lepszego zrozumienia ograniczeń stosowania *Narzędzia AutoNcr*. Przykłady natomiast przedstawiają przypadki, kiedy *AutoNcr* może być pomocne oraz tak jak powyżej, gdzie leżą ograniczenia w jego stosowaniu.

2. CELE I ZAKRES

Narzędzie do automatycznego wyznaczania współczynnika wyboczenia pozwala spełnić dwa sprzeczne cele:

- Oszczędza czas

Typowym przykładem jest prosty, lecz duży model numeryczny ze znaczną liczbą różnych elementów. Użytkownik zna odpowiadające współczynniki wyboczeniowe dla każdego elementu, lecz ich przyporządkowanie do każdego elementu zajmuje dużo czasu. Narzędzie do automatyzacji może to zrobić w jednej chwili.

- Zajmuje się skomplikowanymi przypadkami

Skomplikowany układ konstrukcyjny lub połączenia podatne są tylko dwoma przykładami, kiedy podanie wiarygodnych współczynników wyboczeniowych dla elementów konstrukcyjnych jest trudne bez przeprowadzenia zaawansowanych analiz. Narzędzie do automatyzacji może przeprowadzić niezbędne obliczenia w tle, a następnie podać użytkownikowi wartości współczynników wyboczeniowych w dogodnej dla niego formie.

W przypadku skomplikowanych układów konstrukcyjnych, zanim obliczenia będą mogły być rozpoczęte, od użytkownika wymagane jest podanie dodatkowych informacji, a same obliczenia wymagają zaawansowanych algorytmów. Takie narzędzie wymaga od użytkownika poświęcenia więcej czasu na etapie wprowadzania danych, niż miałyby to miejsce w przypadku prostego narzędzia, pozwalającego na obliczenia tylko podstawowych przypadków. Naszym głównym celem jest znalezienie takiego poziomu złożoności, który pozwoli większości użytkowników na przeprowadzanie szybkich obliczeń w szerokim zakresie przypadków, jak również nie zniweczy jego przydatności w rzeczywistych zadaniach. Dlatego więc, aktualna wersja *Narzędzia AutoNcr* nie została zaprojektowana tak, aby sprostać szczególnym przypadkom w odniesieniu do układu strukturalnego, geometrii elementów i rozdziału obciążenia. W przyszłości przewidywane są ulepszenia w tym zakresie, poprzez rozszerzenie *Narzędzia AutoNcr*.

Poza kwestią poziomu złożoności, istotne jest określenie rodzaju odpowiedzi jakiej oczekujemy od *Narzędzia AutoNcr*. W typowych przypadkach nie oczekujemy od użytkownika przeprowadzenia analizy II-go rzędu, w celu określenia nośności wyboczeniowej elementu, ale do zastosowania uproszczonej metodologii opierającej się na wyznaczeniu sprężystej siły krytycznej (N_{cr}) i współczynników redukcyjnych otrzymanych w oparciu o badania eksperymentalne. Ta metodologia opisana została na przykład w normie Eurokod 3 (EC3-1-1, punkt 6.3). Zakłada ona, że smukłość elementu jest proporcjonalna do sprężystej siły krytycznej N_{cr} . Siła ta powinna być wyznaczona na podstawie właściwości brutto przekroju i elementu. W omawianej metodologii imperfekcje elementu, naprężenia rezydualne i wariacja granicy plastyczności są już uwzględnione we współczynnikach, dlatego też te efekty nie muszą być ponownie uwzględnione przy wyznaczaniu wartości N_{cr} .

Liniowa analiza wyboczeniowa rozwiązuje problem własny idealnie liniowego, sprężystego elementu. Uwzględnia ona rozkład siły normalnej w elemencie oraz ograniczenia wynikające z warunków brzegowych lub elementów dochodzących. W ten sposób otrzymuje się siłę N_{cr} wymaganą przez opisaną powyżej metodologię.

Narzędzie AutoNcr jest tak zaprogramowane, aby dostarczyć sprężyste obciążenie krytyczne (i odpowiadające mu współczynniki wyboczenia giętnego) bez konieczności przeprowadzania czasochłonnych, liniowych analiz wyboczeniowych dla modelu konstrukcji.

Należy podkreślić, że błędy modelowania (np.: niewłaściwe więzy, sztywność połączeń, brak szczegółów konstrukcyjnych) wpływają na wyniki podawane przez *Narzędzie AutoNcr* na tyle, na ile wpływają one na wyniki liniowej analizy wyboczeniowej. Dlatego użytkownik powinien się upewnić czy model numeryczny prawidłowo odwzorowuje więzy i połączenia analizowanych elementów. Ponadto zachęca się, aby użytkownik przeprowadzał ocenę inżynierską otrzymanych wyników automatycznych obliczeń, a w przypadku, gdy nie jest ich pewny wykonał dalsze analizy.

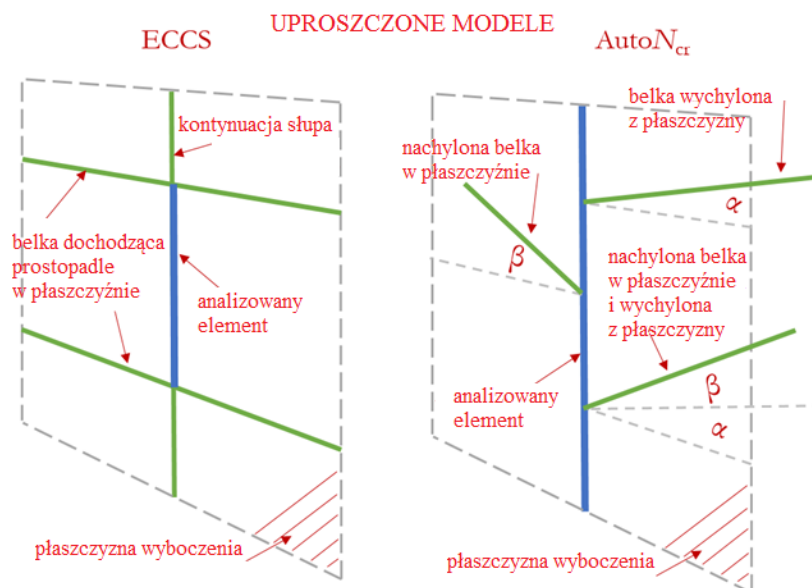
3. METODOLOGIA

Algorytm obliczeń automatycznych opiera się na rekomendacjach European Convention for Constructional Steelwork zawartych w normie EC3-1-1 (ECCS, 2006). Metodologia przedstawiona w Aneksie A została zaimplementowana i rozszerzona w celu zwiększenia zakresu obsługiwanych przypadków przez *Narzędzie AutoNcr*.

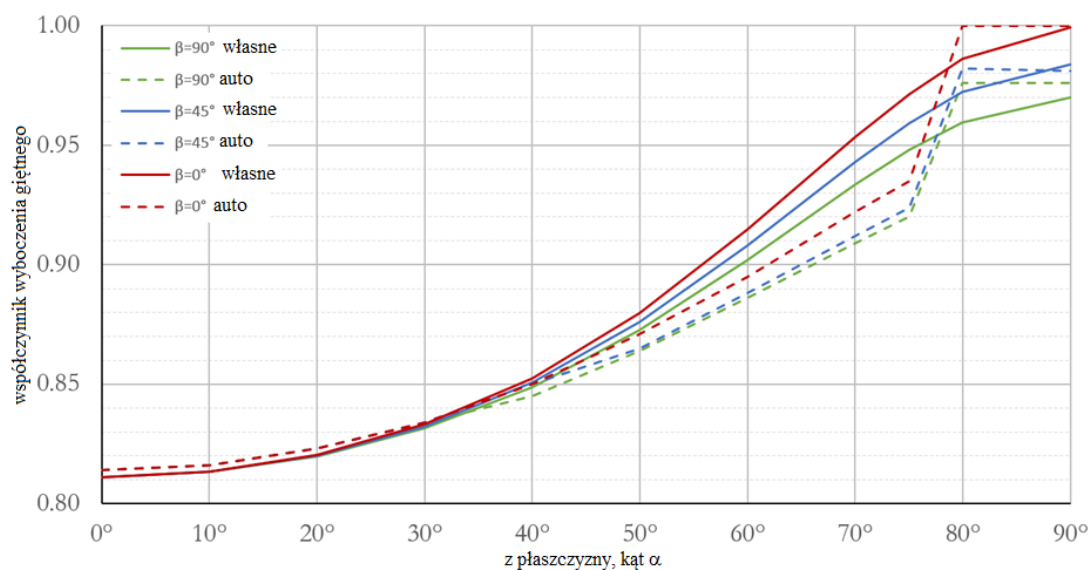
Zgodnie z metodologią przedstawioną w Aneksie A długość wyboczeniowa wyznaczana jest niezależnie dla każdego elementu konstrukcji według uproszczonego modelu. Model ten jest przyjmowany poprzez wydzielenie analizowanego elementu ze złożonej konstrukcji i zastąpienie elementów dochodzących podporami podatnymi. Metodologia opisana we wspomnianej dokumentacji pozwala na analizę pojedynczego słupa podpartego na obu końcach przez belki prostopadłe i/lub jego kontynuację (*Rysunek 1a*). Opisane podejście w *Narzędziu AutoNcr* zostało rozszerzone o dwa poniższe aspekty:

- Wprowadzenie podpór lub elementów dochodzących nie jest ograniczone do węzłów końcowych analizowanego elementu. Dozwolona jest każda liczba dochodzących elementów w dowolnych punktach na długości analizowanego elementu.
- Wystarczająco dokładne wyniki spodziewane są w przypadkach, gdy elementy łączą się pod dowolnym kątem w płaszczyźnie (β). Oś środkowa elementów dochodzących nie musi znajdować w płaszczyźnie wyboczenia analizowanego elementu. Kąt między elementem dochodzącym a płaszczyzną wyboczenia (α) może zmieniać się w dużym zakresie nie powodując przy tym utraty dokładności rozwiązań (*Rysunek 2*).

Uproszczony model zastosowany w *Narzędziu AutoNcr* jest pokazany na *Rysunku 1b*. Proszę zwrócić uwagę, że pomimo rozszerzenia oryginalnego podejścia (opisanego w Załączniku A normy PN-EN 1993-1-1) obliczenia nadal opierają się na uproszczonym modelu, który pozwala na uwzględnienie tylko bezpośrednio dochodzących elementów do analizowanego elementu. Tak więc, **jeśli oddalone elementy konstrukcji mają wpływ na wyboczenie giętne analizowanego elementu to podejście uproszczone nie zapewni dokładnej wartości siły N_{cr}** . Odpowiadające ograniczenia są opisane na końcu tego rozdziału.



Rysunek 1. Porównanie założeń uproszczonego modelu i jego zakres w metodologii ECCS (a) oraz w programie AxisVM (b).



Rysunek 2. Dokładność Narzędzia AutoNcr zastosowanego w programie AxisVM wykorzystywanego do wyznaczania współczynnika wyboczeniowego słupa podpartego przez belkę ustawioną pod różnym kątem (szczegóły patrz przykład w punkcie 4.3.4). Proszę zauważyć, że błąd obliczeniowy jest pomijalny dla dużego zakresu kombinacji kątów α i β .

Podparcie w modelu uproszczonym może odzwierciedlać cztery typy więzów w globalnym modelu numerycznym:

- **Zablokowany stopień swobody**

AxisVM umożliwia użytkownikowi na zablokowanie każdego z sześciu węzłowych stopni swobody w każdym węźle. Tak zdefiniowane przez użytkownika ograniczenia (więzy) są przyjmowane w modelu uproszczonym jako podpory sztywne.

- **Podpora węzłowa**

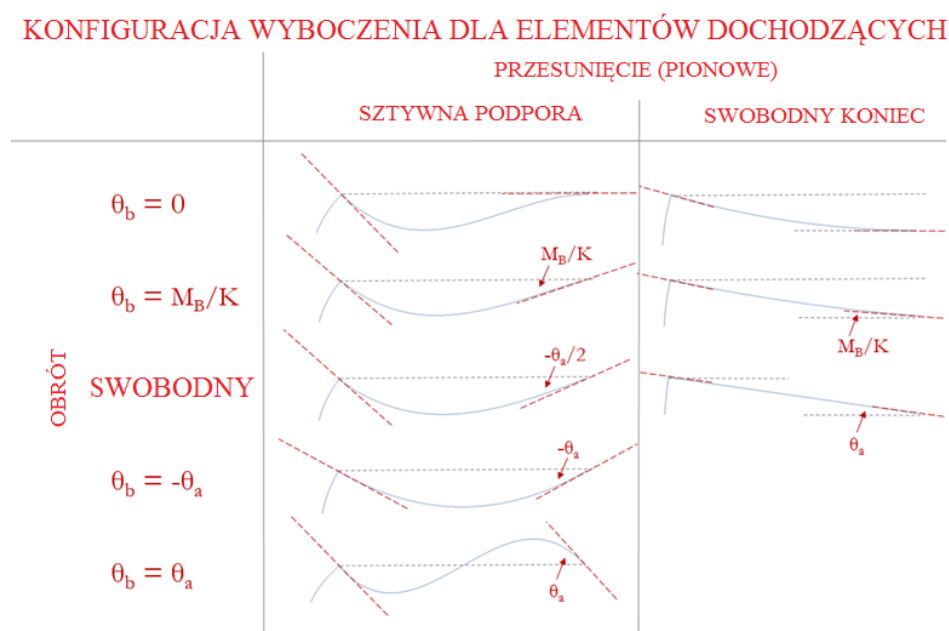
Podpory z charakterystyką liniową wprowadzone do dowolnych węzłów na elemencie kopiowane są do modelu uproszczonego bez modyfikacji. Podpory o charakterystyce nieliniowej są zastępowane przez podpory liniowe ze sztywnością odpowiadającą charakterystyce początkowej podpory nieliniowej. Podpory o charakterystyce niesymetrycznej (tj. aktywne przy ściskaniu lub rozciąganiu) nie są uwzględniane i zastępowane są przez podpory o charakterystyce symetrycznej.

- **Zwolnienia węzłowe elementu**

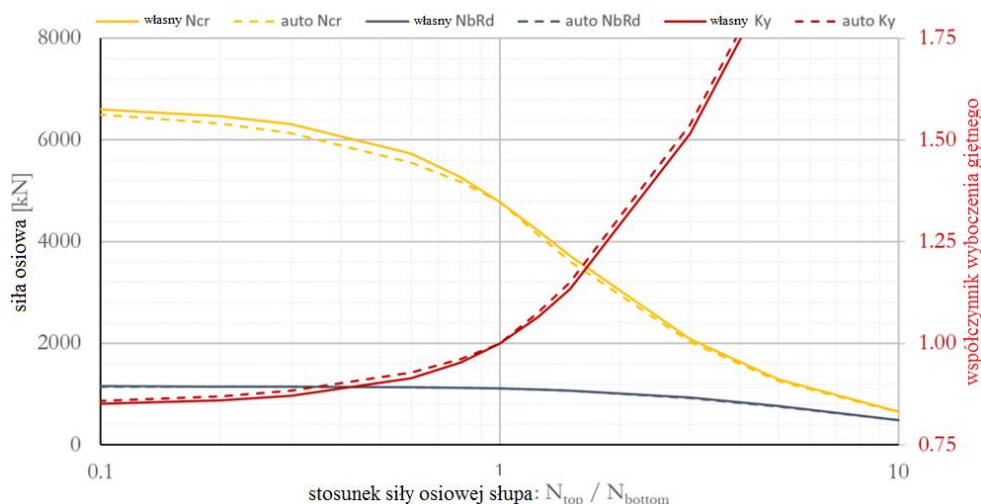
Element w uproszczonym modelu ma sztywne zwolnienia, dlatego oryginalne zwolnienia są reprezentowane przez podpory na końcach elementu. Utwierdzone, podatne i przegubowe zwolnienia są modelowane odpowiednio jako podpory sztywne, podatne i przegubowe. Ograniczona nośność podpór nie jest brana pod uwagę.

- **Elementy dochodzące**

Podparcie może być zrealizowane przez inny element dochodzący. Zależy ono wtedy mocno od warunków podparcia i sił wewnętrznych w dochodzącym elemencie. *Narzędzie AutoNcr* klasyfikuje elementy dochodzące w oparciu o warunki podparcia na ich końcach. *Rysunek 3* podsumowuje możliwe konfiguracje podpór dla elementów dochodzących. *Narzędzie AutoNcr* może uwzględnić także redukcję sztywności podparcia ze względu na siłę osiową w elemencie dochodzącym. *Rysunek 4* przedstawia jak wzrost siły osiowej w elemencie podpierającym zmniejsza sprężystą siłę krytyczną elementu podpieranego. Należy zwrócić uwagę na dokładność *Narzędzia AutoNcr*.



Rysunek 3. Konfiguracja podparć elementów dochodzących uwzględniona przez uproszczony model.



Rysunek 4. Sprężysta siła krytyczna słupa jako funkcja stosunku siły ściskającej na jego górze i dole (szczegóły patrz przykład w punkcie 4.2.5).

Jeżeli podpora w uproszczonym modelu jest złożona z kilku części (np. kilka elementów dochodzących i podatne zwolnienie węzłowe) to jej sztywność podparcia jest wyznaczona jako kombinacja wpływów części składowych.

Współczynnik wyboczenia giętnego jest wyznaczany na podstawie wzorów z dokumentacji ECCS (ECCS, 2006).

Dla nieprzechyłowej postaci wyboczenia zalecane wyrażenie przyjmuje postać wg wzoru (298)

$$\frac{L_{cr}}{L} = \frac{1 + 0.145(\eta_1 + \eta_2) - 0.265\eta_1\eta_2}{2 - 0.364(\eta_1 + \eta_2) - 0.247\eta_1\eta_2}$$

Dla przechyłowej postaci wyboczenia wg wzoru (299)

$$\frac{L_{cr}}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0.2(\eta_1 + \eta_2) - 0.12\eta_1\eta_2}{1 - 0.8(\eta_1 + \eta_2) + 0.60\eta_1\eta_2}}$$

gdzie L_{cr} jest długością wyboczeniową; η_1 i η_2 są tzw. współczynnikami dystrybucji, które opisują warunki podparcia elementu na obu końcach. Współczynniki dystrybucji są wyznaczone na podstawie sztywności podpór w modelu uproszczonym, zgodnie z przytaczaną metodologią na podstawie wzorów (293) i (294), lecz rozszerzoną o możliwość uwzględnienia dodatkowych warunków podparcia.

Zastosowanie opisanej metodologii jest ograniczone przez następujące czynniki:

- Sztywności podparć w uproszczonym modelu są uzależnione od właściwości tylko tych elementów, które są bezpośrednio połączone z analizowanym elementem. Dlatego dokładne wyniki mogą być zagwarantowane tylko dla prostych konstrukcji składających się z kilku elementów. Należy pamiętać, że (za wyjątkiem wyidealizowanych prętów kratownicy) **elementy konstrukcji nie wybaczą się indywidualnie, lecz kilka lub wszystkie z nich tracą stateczność jednocześnie**. Dlatego wyboczenie giętne pojedynczego elementu w złożonej konstrukcji może silnie zależeć od dalej położonych elementów. Model uproszczony w *Narzędziu AutoNcr* generalnie nie uwzględnia takiego wpływu pośredniego.

Biorąc pod uwagę, że ważnym obszarem zastosowania są konstrukcje ramowe, *Narzędzie AutoNcr* zostało skalibrowane tak, aby zapewnić prawidłowe wyniki dla elementów układów ramowych, jeżeli spełniony jest poniższy warunek:

$$\frac{N_{Ed,m}}{N_{cr,m}} = \frac{N_{Ed,i}}{N_{cr,i}}$$

dla wszystkich i , gdzie N_{Ed} jest obliczeniową siłą osiową; N_{cr} jest sprężystą siłą krytyczną przy założeniu swobodnie podpartego elementu (tzw. siła Eulera); m oraz i odnoszą się odpowiednio do analizowanego elementu i wszystkich równoległych elementów w ramie. Ten warunek jest zazwyczaj spełniony przez oba słupy i rygle typowego układu ramowego.

- Zakłada się stały rozkład siły osiowej pomiędzy kolejnymi połączeniami każdego elementu. W uproszczonym modelu rozkład wyższego rzędu siły osiowej jest zamieniany na rozkład stały, wykorzystując następujące założenie: **siły w elemencie są modelowane jako maksymalna wartość siły ściskającej** z niejednorodnego rozkładu wzdłuż całego elementu.
- Efekt usztywniający elementów poddanych rozciąganiu nie jest uwzględniany.
- Zakłada się, że elementy mają stały przekrój na swojej długości. Elementy podpierające ze zbieżnym przekrojem są zastępowane przez elementy o stałym przekroju. Charakterystyka przekroju zastępczego ma zapewnić dobre przybliżenie minimalnej sztywności obrotowej, jaką jest w stanie zapewnić element o zbieżnym przekroju. Więcej informacji o tym zagadnieniu znajduje się w Rozdziale 4.3.5.

Użytkownik powinien zapoznać się z powyższymi ograniczeniami. Decyzja o korzystaniu w projektowaniu z *Narzędzia AutoNcr* powinna opierać się na znajomości założeń i metodologii przyjętej w programie. Przykłady przedstawione w kolejnych rozdziałach powinny przybliżyć *Narzędzie AutoNcr* i jego granice stosowalności.

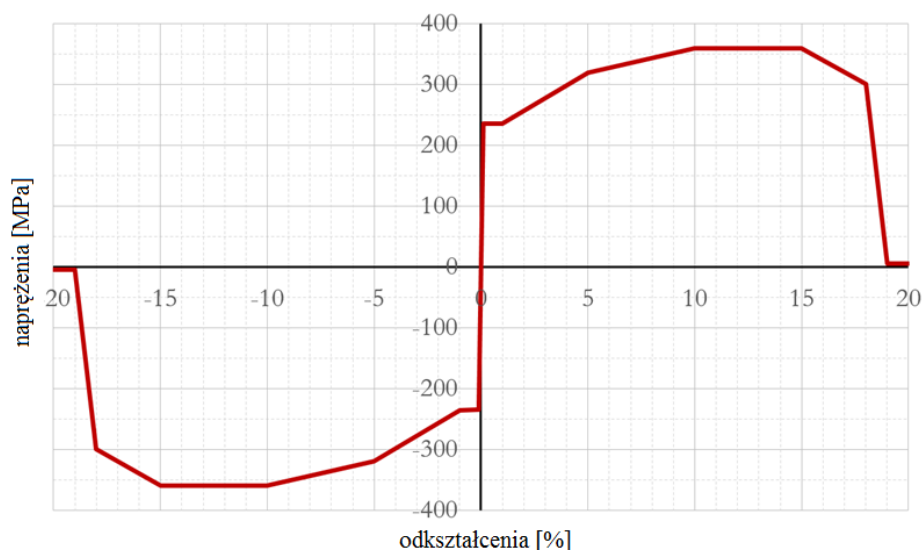
4. PRZYKŁADY POJEDYNCZYCH ELEMENTÓW

W niniejszym rozdziale przedstawione są przykłady słupa podpartego przez kilka typów więzów. Celem tych przykładów jest pokazanie jak działa model uproszczony *Narzędzia AutoNcr* i jakie są jego ograniczenia. Pierwszy przykład dotyczy najprostszego przypadku tj. wyboczenia swobodnie podpartego słupa. Następnie przedstawione są przykłady o rosnącej złożoności.

Przykłady te służą także jako przykłady weryfikacyjne. Dlatego wyniki dla sprężystej liniowej analizy wyboczeniowej pokazane są jako referencja, a nieliniowa analiza statyczna została przeprowadzona także na modelach z zastępczymi imperfekcjami początkowymi zgodnymi z normą EC3-1-1 5.3.2. Pozwoliło to na pokazanie i porównanie wyników otrzymanych w ramach bardziej zaawansowanych analiz, które są odpowiednie w przypadku złożonych zagadnień.

Wartości kilku parametrów modelu przyjęto identyczne we wszystkich przykładach. Zakłada się, że elementy wykonane są ze stali S235 ($E_0 = 210$ GPa; $f_y = 23,5$ kN/cm²; $f_u = 36$ kN/cm²). Każdy element zamodelowano jako element prętowy, składający się z 20 elementów skończonych. Obciążenia osiowe są wprowadzone jako osiowe siły skupione. Zakłada się, że zarówno wyboczenie giętne wokół słabszej osi, jak i zwichrzenie analizowanego słupa jest wyeliminowane przez prawidłowo przyjęte podparcia boczne. Dla uproszczenia przyjęto, że elementy dochodzące są również zabezpieczone przed zwichrzeniem. Pojęcie *analizy własnej* odnosi się do liniowej sprężystej analizy wyboczeniowej. Pojęcie *Auto* odnosi się do wyników *Narzędzia AutoNcr*.

Zakłada się, że zastępcze imperfekcje geometryczne są zgodne z pierwszą postacią (modą) wyboczenia, otrzymaną w ramach sprężystej analizy wyboczeniowej. Amplitudy imperfekcji są wyliczone zgodnie z metodologią opracowaną przez Chladný i Štujberová (2013), która jest zalecana przez Eurokod 3 (EC3-1-1 5.3.2(11)). Nieliniowa analiza sprężysta dotyczy nieliniowej analizy statycznej z imperfekcjami geometrycznymi, zakładając liniowo sprężysty materiał. Nieliniowa niesprężysta analiza jest identyczna pod każdym względem, ale uwzględnia dodatkowo nieliniowość materiału. Zgodnie z zaleceniami EC3-1-1 5.4.3(4) oraz EC3-1-5 (CEN, 2009b) C.6 zdefiniowany został niestandardowy wykres naprężenie-odkształcenie, który pozwala uwzględnić wzmocnienie stali przy obciążeniu monotonicznym (*Rysunek 5*). Wszystkie obliczenia zostały wykonane w programie AxisVM.



Rysunek 5. Wykres naprężenie-odkształcenie stali przyjęte w analizie nieliniowej

Nośność i siły krytyczne obliczane są w następujący sposób:

- **Analiza własna** (globalna analiza wyboczeniowa)

Krytyczna siła osiowa (*własna* N_{cr}) odpowiada punktowi bifurkacji układu idealnego. Najmniejsza wartość własna, otrzymana z liniowej analizy wyboczeniowej przeprowadzonej dla analizowanego elementu obciążonego siłą osiową, przyjmowana jest jako N_{cr} . Współczynnik wyboczeniowy (*własna* K_y) odpowiadający obliczonej sile N_{cr} jest wyznaczony z zależności przedstawionej poniżej:

$$K_y = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{N_{cr} L^2}}$$

Nośność elementu na wyboczenie giętne (*własna* N_{bRd}) jest wyznaczana przez Moduł Wymiarowania Stali (SD1) w programie AxisVM zgodnie z EC3 wykorzystując *własna* K_y jako daną początkową.

- **Obliczenia automatyczne**

Krytyczna siła osiowa (*Auto* N_{cr}) i odpowiadający współczynnik wyboczenia (*auto* K_y) jest wyznaczany przez *Narzędzie AutoNcr*, wykorzystujące metodologię opisaną w Rozdziale 3. Nośność elementu na wyboczenie giętne (*Auto* N_{bRd}) jest wyznaczane przez Moduł Wymiarowania Stali (SD1) AxisVM zgodnie z EC3, wykorzystując wartość *auto* K_y jako daną początkową.

- **Nieliniowa analiza sprężysta**

Krytyczna siła osiowa (*nieliniowa sprężysta* N_{cr}) jest określona jako obciążenie osiowe w punkcie przegięcia krzywej ścieżki równowagi (siła – przemieszczenie poziome). Nośność na wyboczenie (*nieliniowa sprężysta* $N_{b,Rd}$) jest określona jako wartość obciążenia osiowego, która powoduje 100% wykorzystania nośności elementu. Jest ona sprawdzana wtedy, jedynie jako **warunek wytrzymałościowy nośności przekroju** (warunek N-M-V w Module Wymiarowania Stali (SD1) AxisVM).

- **Nieliniowa analiza niesprężysta**

Nośność na wyboczenie (*nieliniowa niesprężysta* N_{bRd}) jest określona jako maksymalny punkt na krzywej ścieżki równowagi (siła – przemieszczenie poziome) tj. **maksymalna nośność przekroju** z modelu numerycznego.

4.1. SŁUP Z PODPORAMI TYLKO NA KOŃCACH

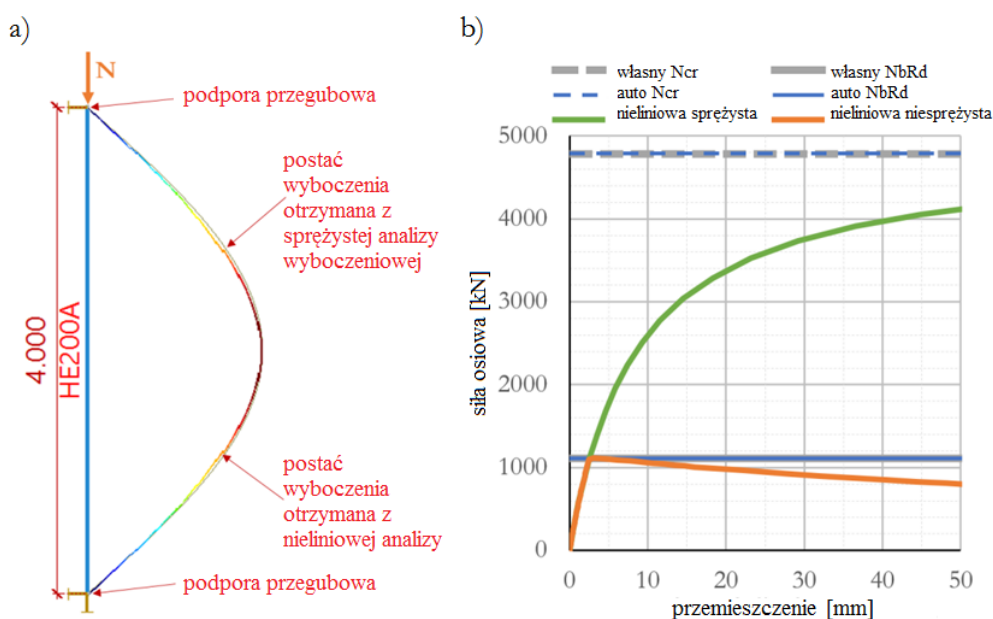
W pierwszej grupie przykładów analizowany jest pojedynczy słup z kilkoma opcjami podparcia na swoich końcach. Słup ma wysokość 4 m, wykonany jest z przekroju HE200A i został obciążony osiowo siłą skupioną, przyłożoną do jego główicy.

4.1.1. SŁUP SWOBODNIE PODPARTY

Pierwszy przykład dotyczy podstawowego problemu wyboczenia giętnego: słupa swobodnie podpartego. Na *Rysunku 6a* przedstawiono dane wejściowe i postać wyboczeniową słupa, otrzymaną z liniowej, sprężystej analizy wyboczeniowej jak i analizy nieliniowej. Proszę zwrócić uwagę, że obie postacie są praktycznie identyczne.

Wykresy na *Rysunku 6b* przedstawiają relację siła osiowa – maksymalne przemieszczenie poziome (w płaszczyźnie wyboczenia) dla kilku typów analiz. Wszystkie wykresy przedstawiają przemieszczenie poziome, mierzone w punkcie środkowym słupa. Wyniki przeprowadzonych analiz zestawione zostały w *Tabeli 1*.

Wyniki otrzymane z *Narzędzia AutoNcr* doskonale odpowiadają wynikom otrzymanym z analizy wyboczeniowej (tzw. własnej). Różnica między analizą liniową i nieliniową jest pomijalna.



Rysunek 6. Analiza wyboczenia giętnego słupa swobodnie podpartego. a) dane początkowe i postacie wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 1. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa swobodnie podpartego.
Siły podane w kN.

	Ky	Ncr	NbRd
własna	1.00	4784	1110
AutoNcr	1.00	4784	1110
nieliniowa sprężysta	-	4809	1126
nieliniowa niesprężysta	-	-	1116

4.1.2. UTWIERDZONY SŁUP RAMY PRZECZYŁOWEJ

Drugi przypadek przedstawia układ przeczylowy słupa, który nie posiada podparcia bocznego w górnym węźle (*Rysunek 8a*). **Definicja „przechylowości”** ram wytłumaczona jest w dokumentacji do EC3 (ECCS, 2006) w punkcie 4.3.2.1.2:

„Termin *nieprzechylowa rama* odnosi się do ram, których odpowiedź kinematyczna na siły poziome w płaszczyźnie ramy jest wystarczająca duża, aby można było pominąć dodatkowe siły i momenty wynikające z przemieszczenia poziomego (tzw. efekty P - Δ). Oznacza to, że globalne efekty drugiego rzędu mogą być pominięte. W przypadku, gdy efekty drugiego rzędu nie są pomijalne, ramę klasyfikujemy jako przechylową.”

Należy zwrócić uwagę, że przechylowość i kwestie stężenia ramy dotyczą innych aspektów jej odpowiedzi kinematycznej. **Atrybuty przechylowości dotyczą wrażliwości układu na efekty drugiego rzędu, natomiast atrybuty stężenia dotyczą występowania bądź nie, odpowiednio sztywnego stężenia.** Dlatego, stężone ramy nie zawsze będą układami nieprzechylowymi. Ten drugi warunek powinien być zweryfikowany niezależnie od stężenia.

Norma EC3-1-1 w punkcie 5.2.1(3) sugeruje przyjęcie poniższych kryteriów niewrażliwości na efekty drugiego rzędu:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 10 \quad \text{dla analizy sprężystej}$$

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 15 \quad \text{dla analizy plastycznej,}$$

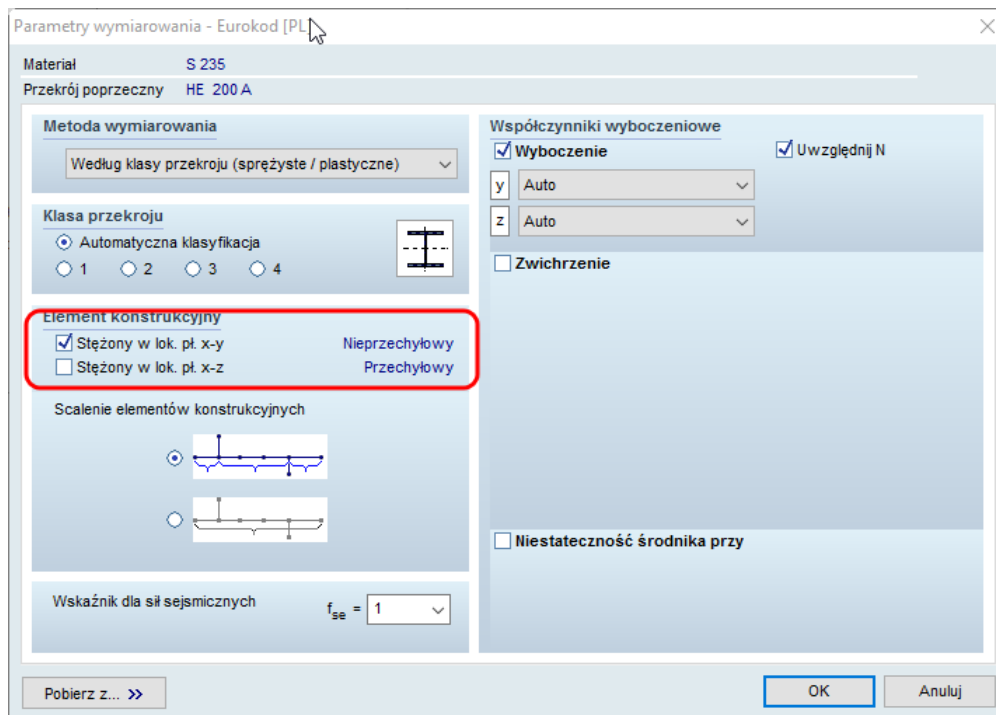
gdzie F_{cr} jest siłą krytyczną związaną z globalną postacią wyboczenia, F_{Ed} jest obciążeniem obliczeniowym konstrukcji, a α_{cr} jest mnożnikiem obciążenia krytycznego.

Jeżeli wpływ zwichrzenia na globalną postać niestateczności jest pomijalny, wtedy mnożnik (n_{cr}) otrzymany z analizy wyboczeniowej (zakładka *Wyboczenie* w AxisVM) jest dobrym przybliżeniem α_{cr} .

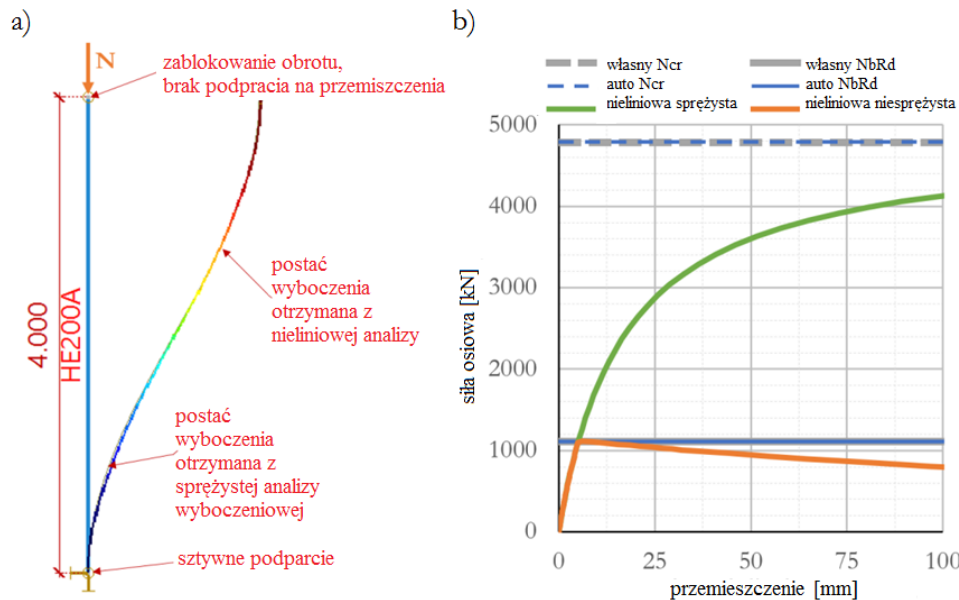
Efekty drugiego rzędu mają duży wpływ na sprężyste obciążenie krytyczne i wrażliwość na globalną utratę stateczności elementów ram przechylowych. **Określenie atrybutu przechylowości elementu należy do użytkownika**, który definiuje go w oknie dialogowym *Parametrów Wymiarowania Stali* (*Rysunek 7*). Z tego miejsca jest on odczytywany przez *Narzędzie AutoNcr*. Należy zwrócić uwagę, że wyboczenie wokół lokalnej osi y elementu występuje w lokalnej płaszczyźnie x-z. Dlatego słup w przykładzie jest ustawiony jako przechylowy w lokalnej płaszczyźnie x-z, a nieprzechylowy w płaszczyźnie y-z (nie rozpatrujemy w tym momencie wyboczenia giętnego wokół słabszej osi).

Dane wejściowe i postacie wyboczenia słupa przedstawiono na *Rysunku 8a*. Postacie wyboczenia otrzymane ze statyki nieliniowej i liniowej analizy wyboczeniowej są praktycznie identyczne. Należy zauważyć, że chociaż postać wyboczenia w tym przypadku różni się od postaci z poprzedniego przykładu, to i tak odpowiada im ten sam współczynnik wyboczenia giętnego. Dlatego więc, sprężyste obciążenie krytyczne i odporność na wyboczenie giętne są również takie same jak w poprzednim przykładzie (*Rysunek 8b, Tabela 2*). Istotną różnicą jest poziome przemieszczenie słupa, które dla przykładu pierwszego i drugiego wynosi odpowiednio 6,06 mm i 3,03 mm. (W tym przykładzie maksymalne przemieszczenie zostało zmierzone w poziomie głowicy słupa).

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wyniki otrzymane z *Narzędzia AutoNcr* idealnie pasują do wyników otrzymanych z analizy wyboczeniowej. Różnice pomiędzy analizą liniową i nieliniową są również pomijalne.



Rysunek 7. Ustawienie atrybutów przechyłowości projektowanych elementów w programie AxisVM.



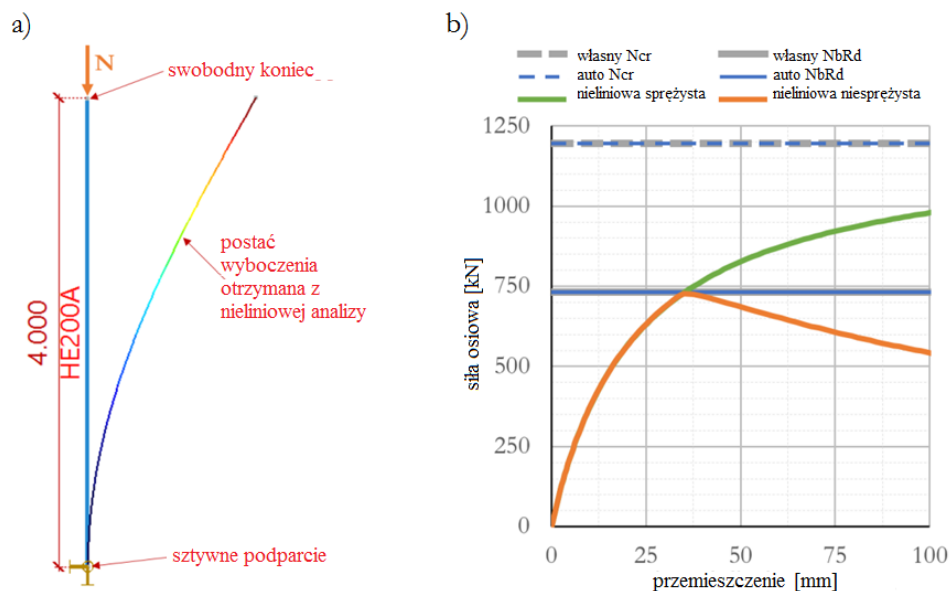
Rysunek 8. Analiza wyboczeniowa przechyłowego, utwierdzonego słupa. a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 2. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej przechyłowego, utwierdzonego słupa.
Siły podane są w kN.

	Ky	Ncr	NbRd
własny	1.00	4784	1110
AutoNcr	1.00	4784	1110
nieliniowa sprężysta	-	4824	1127
nieliniowa niesprężysta	-	-	1116

4.1.3. WSPORNIK (SZTYWNE ZAMOCOWANIE)

Trzecim przykładem jest słup wspornikowy. Element taki ze względu na brak podparcia bocznego w jego górnym węźle rozpatrywany jest jako element przechyłowy, a więc tym samym wrażliwy na efekty drugiego rzędu. Dane wejściowe i postacie wyboczenia przedstawiono na *Rysunku 9a*. Na *Rysunku 9b* i w *Tabeli 3* przedstawiono wyniki otrzymane z różnych analiz. Wszystkie analizy prowadzą do wyników nieznacznie różniących się od referencyjnych wyników otrzymanych z analizy wyboczeniowej.



Rysunek 9. Analiza wyboczeniowa słupa wspornikowego. a) dane wejściowe i postać wyboczenia;
b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 3. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa wspornikowego. Siły podane są w kN.

	Ky	Ncr	NbRd
własny	2.00	1196	732.6
AutoNcr	2.00	1196	732.6
nieliniowa sprężysta	-	1198	745.0
nieliniowa niesprężysta	-	-	727.7

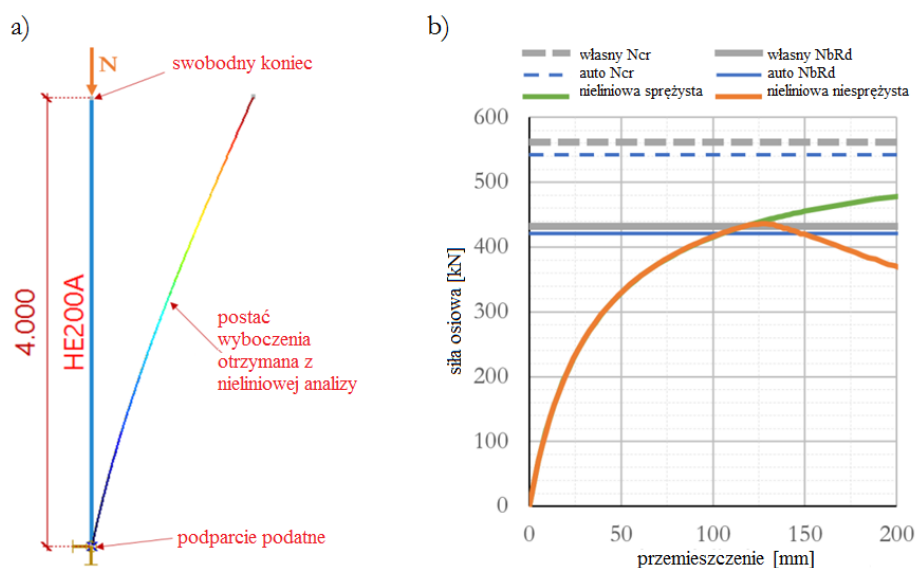
4.1.4. WSPORNIK (ZAMOCOWANIE PODATNE)

Pierwsze trzy przykłady dotyczyły przypadków, które każdy praktykujący inżynier jest w stanie rozwiązać bez pomocy komputera. Ten model jest pierwszym wśród przykładów, który wykracza poza typowe przypadki poprzez wprowadzenie do niego podparcia podatnego. Poprzedni przykład pokazuje rozwiązanie dla idealnie sztywnego zamocowania słupa. Jeżeli umożliwiony jest obrót na podporze słupa, wtedy układ konstrukcyjny jest chwiejny a siła krytyczna jest równa zero. Wyniki dla podpory podatnej powinny być pomiędzy tymi dwoma rozwiązaniami.

Sztywność podparcia jest zdefiniowana jako $R_{\text{W}} = 2EI/L$, gdzie E , I oraz L są odpowiednio początkową sztywnością materiału (stali), momentem bezwładności względem silniejszej osi przekroju słupa i wysokością słupa. Należy zauważyć, że z powodu skończonej sztywności podpory, styczna do postaci wyboczenia w poziomie podparcia nie jest pionowa, porównaj *Rysunek 10a* z *Rysunkiem 9a*.

Skończona sztywność podparcia jest także zauważalna w wynikach analiz (*Rysunek 10b*, *Tabela 4*). Względem poprzedniego przykładu otrzymana wartość sprężystej osiowej siły krytycznej wynosi 47%, a nośność ze względu na wyboczenie stanowi 59% poprzedniej wartości. Wartość współczynnika wyboczeniowego wynosi 2.92.

Mimo, że rozbieżności wyników w analizowanym przykładzie są większe niż w poprzednich przykładach, to i tak mieszczą się one w dopuszczalnym zakresie biorąc pod uwagę nieodłączną niepewność analizy wyboczeniowej.



Rysunek 10. Analiza wyboczeniowa słupa wspornikowego (utwierdzenie z podatnością obrotową).

a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 4. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa wspornikowego (utwierdzenie z podatnością obrotową). Siły podane są w kN.

	Ky	Ncr	NbRd
własny	2.92	562	432.2
AutoNcr	2.97	542	421.3
nieliniowa sprężysta	-	558	444.7
nieliniowa niesprężysta	-	-	435.8

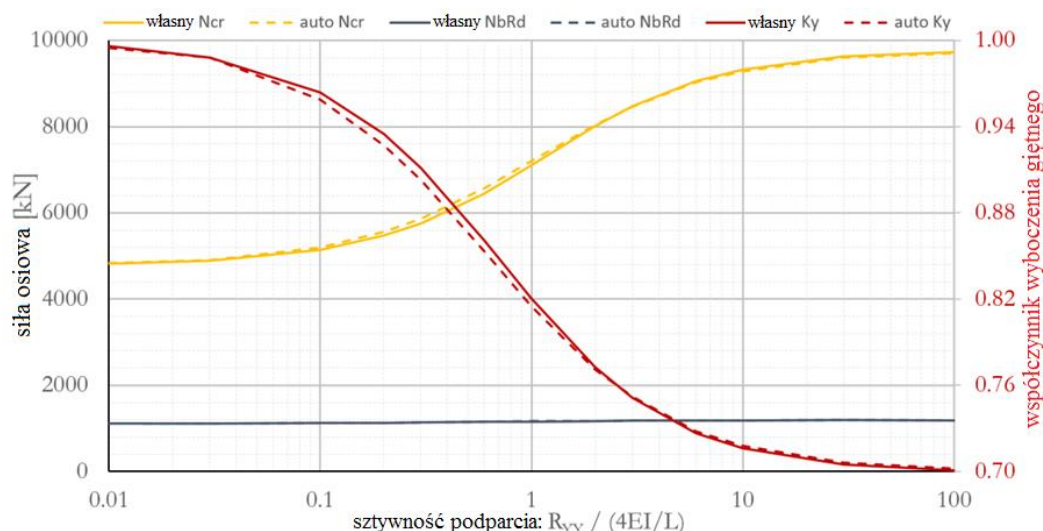
4.1.5. DOKŁADNOŚĆ NARZĘDZIA *AUTO* N_{cr} PRZY ANALIZIE POJEDYNCZYCH SŁUPÓW

Poprzedni przykład pokazał, że określenie sprężystej osiowej siły krytycznej w przypadku elementów z podatnymi podporami jest większym wyzwaniem niż w przypadku elementów sztywno zamocowanych lub swobodnie podpartych. W tej części omówiona zostanie jak dokładność *Narzędzia AutoNcr* zmienia się po wprowadzeniu podpór podatnych. Należy zauważyć, że z praktycznego punktu widzenia, dobra dokładność takiego narzędzia w kontekście podatnych podpór jest szczególnie istotna. Związane jest to z tym, że sztywności podparć od dochodzących belek czy słupów są w rzeczywistości podatne.

Jako pierwszy przeanalizowany jest przypadek słupa swobodnie podpartego z pierwszego przykładu. Wykresy na *Rysunku 11* przedstawiają sprężystą siłę krytyczną (N_{cr}), nośność na wybowczenie (N_{bRd}) i współczynnik wybowczenia giętnego (K_y) jako funkcja sztywności podparcia górnego węzła. Sztywność tego podparcia jest określona tutaj jako wartość względna do sztywności giętej referencyjnego słupa, który jest sztywno zamocowany i podparty przegubowo na górze ($4EI/L$).

Dopóki sztywność podparcia górnego węzła nie przekracza 0,01 krotności sztywności słupa referencyjnego to otrzymane wyniki są zbliżone do wyników otrzymanych z pierwszego przykładu: $K_y = 1,0$, $N_{cr} = 4787$ kN oraz $N_{bRd} = 1110$ kN. W przypadku, gdy sztywność podparcia węzła górnego wzrasta, wtedy N_{cr} i N_{bRd} również wzrastają, podczas gdy K_y stopniowo maleje. Gdy sztywność podparcia węzła górnego przekroczy 100 krotność sztywności słupa referencyjnego otrzymane wyniki są bardzo zbliżone do przypadku sztywno-przegubowego $K_y = 0,699$, $N_{cr} = 9792$ kN i $N_{bRd} = 1192$ kN.

Narzędzie AutoNcr zapewnia idealne wyniki dla przypadków szczególnych, jak również, co jest bardziej istotne, zapewnia wysoce zbliżone wyniki dla przypadków z podatnymi podporami (porównaj linię ciągłą z linią przerywaną na *Rysunku 11*). Maksymalna wartość błędu wynosi odpowiednio 0,90%, 1,80% oraz 0,22% dla K_y , N_{cr} , oraz N_{bRd} .

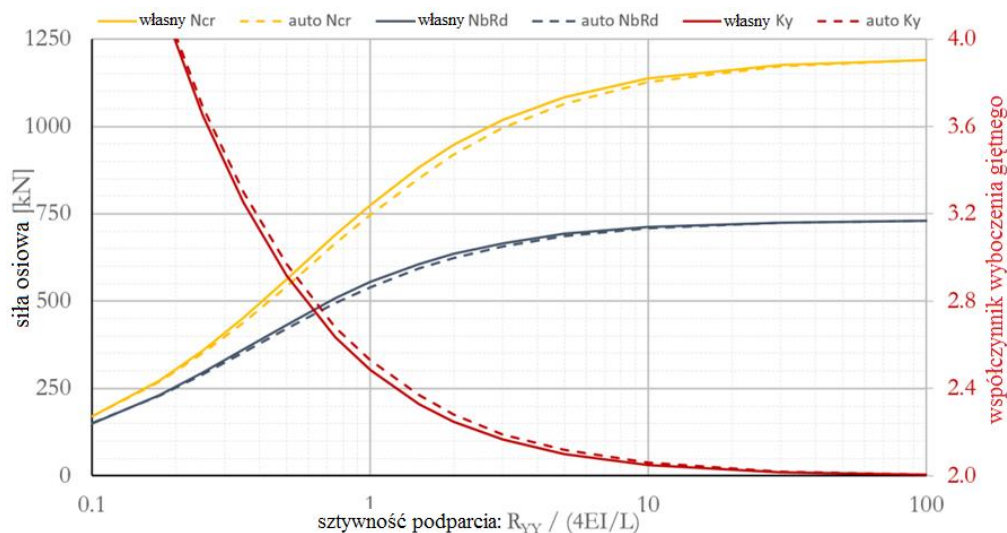


Rysunek 11. Parametry wybowczenia giętnego słupa przegubowo zamocowanego na dole i podatnie podpartego na górze. Linie ciągłe odnoszą się do wyników z analizy wybowceniowej, przerywane linie odnoszą się do wyników *Narzędzia AutoNcr*.

Wyniki dla wspornika z przykładu trzeciego są przedstawione na *Rysunku 12*. Sztywność podpory dolnej zmienia się od idealnego przegubu do utwierdzenia. Pełne zamocowanie odpowiada trzeciemu przykładowi z Rozdziału 4.1.3. Czwarty przykład, w którym sztywność podparcia wynosi $2EI/L$, dotyczy

wartości 0,5 na osi poziomej z *Rysunku 12*. Należy zauważyć, że **różnice pomiędzy sprężystą siłą krytyczną i nośnością na wyboczenie giętne zmniejszają się wraz ze zmniejszającą się sztywnością podparcia**.

Narzędzie *AutoNcr* daje wyniki akceptowalne nawet dla małych sztywności podparcia i współczynnika wyboczenia giętnego poza wartość 2,0. Maksymalna wartość błędu w wartościach K_y , N_{cr} , oraz N_{bRd} , wynosi odpowiednio 1.80%, 3.70% oraz 3.10% (patrz *Rysunek 12*). W kontekście zastosowań praktycznych i niepewności analizy wyboczeniowej wyniki dla przeanalizowanych powyżej przypadków należy uznać za poprawne.



Rysunek 12. Parametry wyboczenia giętnego słupa wspornikowego z podatnym utwierdzeniem. Linie ciągłe odnoszą się do wyników z analizy wyboczeniowej, przerywane linie odnoszą się do wyników Narzędzia *AutoNcr*.

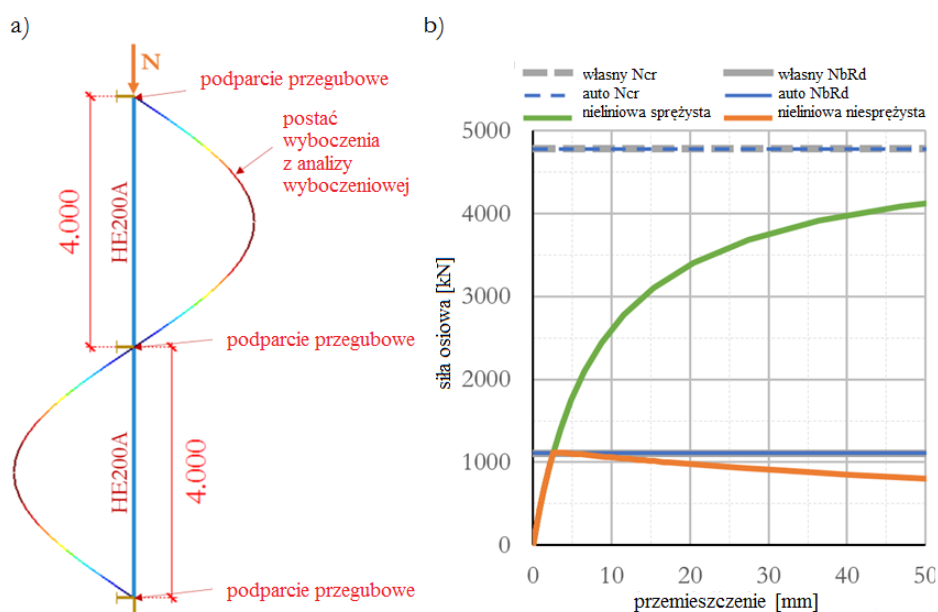
4.2. SŁUP Z WIELOMA PODPORAMI

Poniższe przykłady pokazują możliwości stosowania Narzędzia AutoNcr w przypadku słupów z kilkoma podporami na ich długości. Podstawowe parametry zadań (przekrój poprzeczny słupa, charakterystyka materiałowa, ustawienia analizy) są identyczne z parametrami przyjętymi w poprzednich zadaniach.

4.2.1. ŚCISKANIE OSIOWE, PODPARCIE W POŁOWIE WYSOKOŚCI

W ramach pierwszego przykładu analizowane jest zachowanie słupa swobodnie podpartego z dodatkową przegubową podporą w połowie jego wysokości. Na *Rysunku 13a* zestawiono dane wejściowe i pokazano postać wybocheniową słupa. Należy zauważyć, że słup w tym przykładzie składa się z dwóch segmentów. Każdy z segmentów jest identyczny z przypadkiem słupa swobodnie podpartego z Rozdziału 4.1.1. Istotna różnica pomiędzy wspomnianymi przykładami polega na tym, że w aktualnie analizowanym przykładzie dwa segmenty są połączone, co powoduje ich współzależność (tj. N_{cr} każdego niezależnie analizowanego segmentu wpływa na N_{cr} układu). Prowadzi to do tego, że problem przedstawiony na *Rysunku 13* jest trudniejszy niż przypadki opisane w Rozdziale 4.1.

Na *Rysunku 13b* i w *Tabeli 5* podsumowano wyniki przeprowadzonych analiz. Ponieważ górna i dolna część słupa jest identyczna, ich stateczność jest opisana tą samą siłą N_{cr} . Należy zauważyć, że wartość N_{cr} jest taka sama jak wartość siły krytycznej z przykładu z rozdziału 4.1.1. Narzędzie AutoNcr prawidłowo wyznaczyło charakterystyki wybocheniowe zadania.



Rysunek 13. Analiza wybocheniowa słupa swobodnie podpartego z dodatkową podporą w połowie jego wysokości. a) dane wejściowe i postać wybożenia;
b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

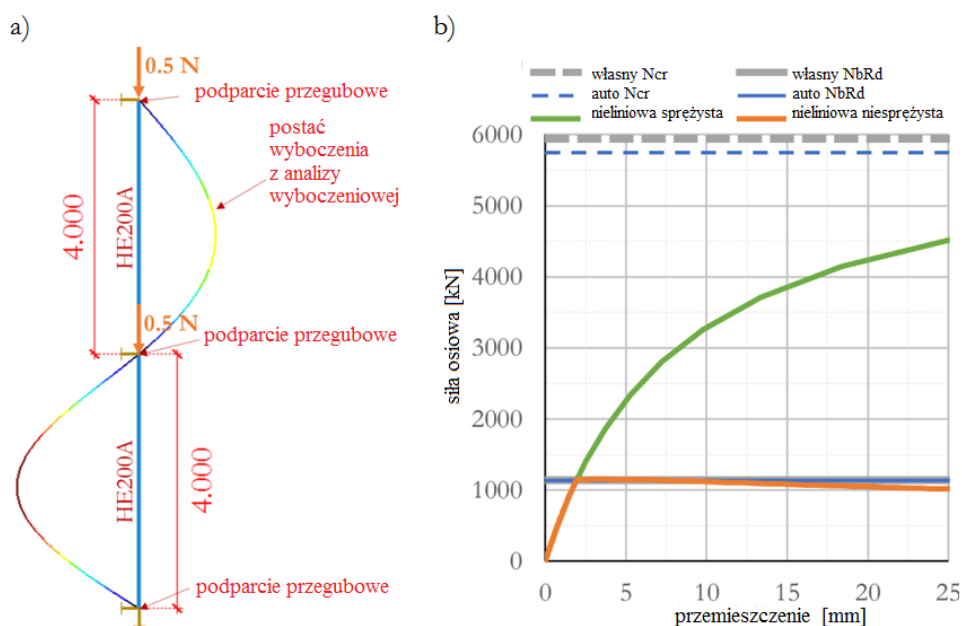
Tabela 5. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa swobodnie podpartego z dodatkową podporą w połowie jego wysokości. Siły podane są w kN.

	Ky	Ncr	NbRd
własny	1.00	4784	1111
AutoNcr	1.00	4784	1111
nieliniowa sprężysta	-	4813	1128
nieliniowa niesprężysta	-	-	1116

4.2.2. PODPARCIE POŚREDNIE, ODCINKOWO STAŁA ŚCISKAJĄCA SIŁA OSIOWA

W tym przykładzie podkreślone zostanie znaczenie rozkładu siły normalnej na długości elementu. Dane wejściowe są identyczne jak w poprzednim przykładzie poza rozkładem siły osiowej tj. połowa siły została przyłożona do górnego węzła słupa a druga połowa siły została przyłożona do podpory pośredniej (*Rysunek 14a*). Wynika z tego, że górna część słupa obciążona jest siłą osiową $0,5 N$, a dolna część słupa siłą N . Siła N_{cr} jest zdefiniowana jako iloczyn mnożnika obciążenia krytycznego (najniższa wartość własna) i obciążenia. Wynika stąd, że górna część słupa będzie miała o połowę mniejszą wartość N_{cr} niż dolna część. Prowadzi to do większego współczynnika wyboczenia giętnego i mniejszej nośności na wyboczenie giętne górnej części słupa.

Na początku wyniki te mogą być zaskakujące, ale istnieje wyjaśnienie tego zjawiska. Wyobraźmy sobie poszukiwanie siły N_{cr} jako eksperyment, w którym obciążenie osiowe w konstrukcji stopniowo wzrasta do momentu utraty stateczności. W takim przypadku zauważylibyśmy, że przemieszczenia poziome dolnej części są większe (zakładając jednakowe imperfekcje obu części), gdyż siła osiowa i moment zginający drugiego rzędu będą większe w dolnej części. Jednakże, dolna część nie może być uproszczona do przypadku swobodnie podpartego słupa. Jest tak dlatego, ponieważ górna część słupa, jako element poddany mniejszemu ścisnaniu, będzie w stanie zapewnić podparcie obrotowe dla dolnej części słupa (w środku rozpiętości całego słupa). Dlatego, dolna część słupa zniszczy się przy większej sile ściskającej niż swobodnie podparty słup, a z kolei górna część słupa zniszczy się przy mniejszej sile ściskającej niż swobodnie podparty słup. Prowadzi to do równowagi, przy której obie części utracą stateczność jednocześnie.



Rysunek 14. Analiza wyboczeniowa słupa obciążonego odcinkowo stałą siłą osiową. a) Dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 6. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa obciążonego odcinkowo stałą siłą osiową. Siły podano w kN. (wartości N_{bRd} w nawiasach okrągłych dotyczą globalnej postaci zniszczenia. Analizowany element nie musi ulec zniszczeniu przy tych poziomach obciążenia).

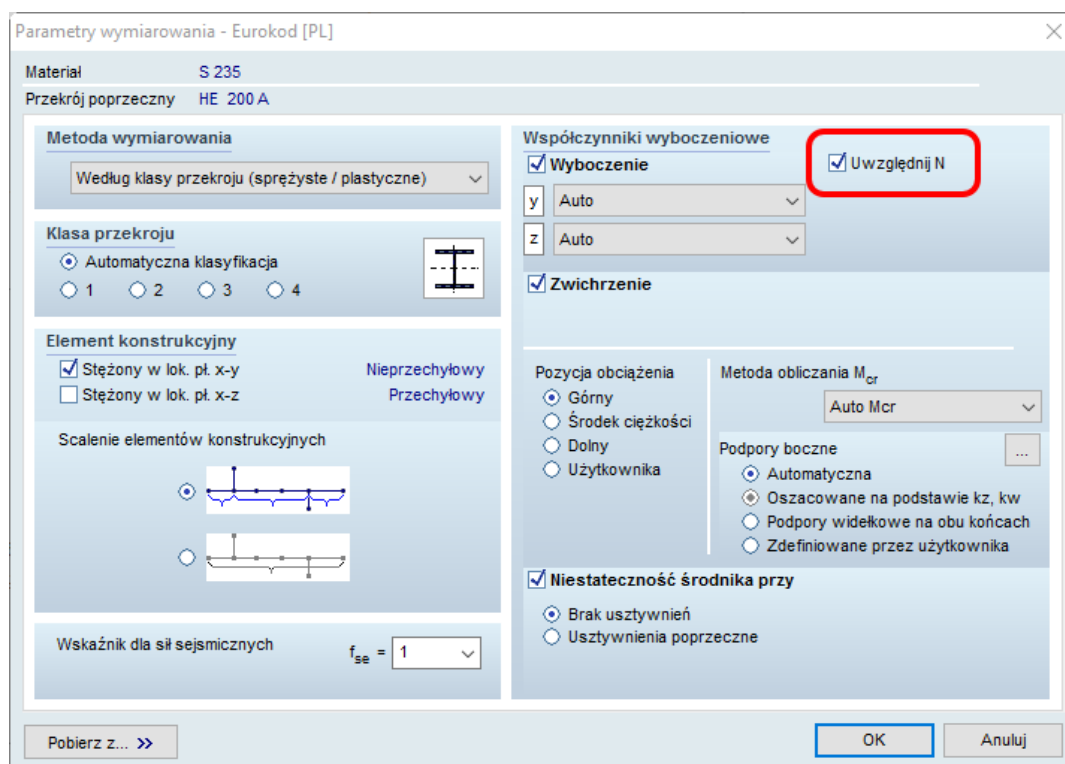
		Ky	Ncr	NbRd
GÓRA	własny	1.27	2971	1025
	AutoNcr	1.29	2879	1018
	nieliniowa sprężysta	-	2996	(576.9)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(577.1)
DÓŁ	własny	0.90	5943	1140
	AutoNcr	0.91	5752	1136
	nieliniowa sprężysta	-	5991	1154
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1154

W przypadku, gdy utrata stateczności elementu konstrukcyjnego w znaczący sposób jest uzależniona od wartości siły osiowej innego elementu, obciążenie osiowe powinny być zawsze brane pod uwagę przez Narzędzie AutoNcr. Fakt ten określa użytkownik w oknie dialogowym *Parametry Wymiarowania Stali* (Rysunek 15). Umożliwia to przeprowadzenie indywidualnych obliczeń, bazujących na rozkładzie sił wewnętrznych, które odpowiadają określonej kombinacji obciążeń. Przy dużej liczbie kombinacji obciążeń i złożonym modelu konstrukcji zakres koniecznych obliczeń numerycznych może być czasochłonny.

Użytkownik może zdecydować, czy wykorzystać rozwiązanie przybliżone, aby przyspieszyć czas obliczeń. Rozwiązanie przybliżone zakłada stały rozkład siły ściskającej wzdłuż analizowanego elementu i pomija wpływ ściskania w pozostałych elementach. To uproszczenie redukuje czas obliczeń, lecz należy mieć na uwadze ograniczenia jakie ze sobą niesie. W analizowanym przykładzie, podejście przybliżone nie różnicuje zachowania górnej i dolnej części słupa, co dałoby rezultaty, które są

identyczne do tych z poprzedniego przykładu. W takim przypadku nie należy stosować rozwiązania przybliżonego.

Na *Rysunku 14b* oraz w *Tabeli 6* przedstawione są wyniki otrzymane z różnych analiz. Należy zauważyć, jak aktualne wyniki zmieniły się w stosunku do wyników pokazanych w *Tabeli 5*. Wyniki alternatywnych analiz są zgodne z wzorcowym wynikiem otrzymanym z analizy wyboczeniowej. Nieliniowa analiza potwierdza, że górna część słupa pełni rolę podpierającą w modelu. Chociaż jej siła N_{cr} jest mniejsza w porównaniu do przypadku słupa swobodnie podpartego (N_{cr} własne 2971 kN < 4784 kN), to jej obciążenie powodujące globalną utratę stateczności (N_{bRd} nieliniowo niesprężyste = 577 kN) stanowi mniej niż 60% nośności na wyboczenie giętne tej części słupa (N_{bRd} własne = 1025 kN). Dzieje się tak, dlatego że elementem krytycznym słupa jest jego dolna część.

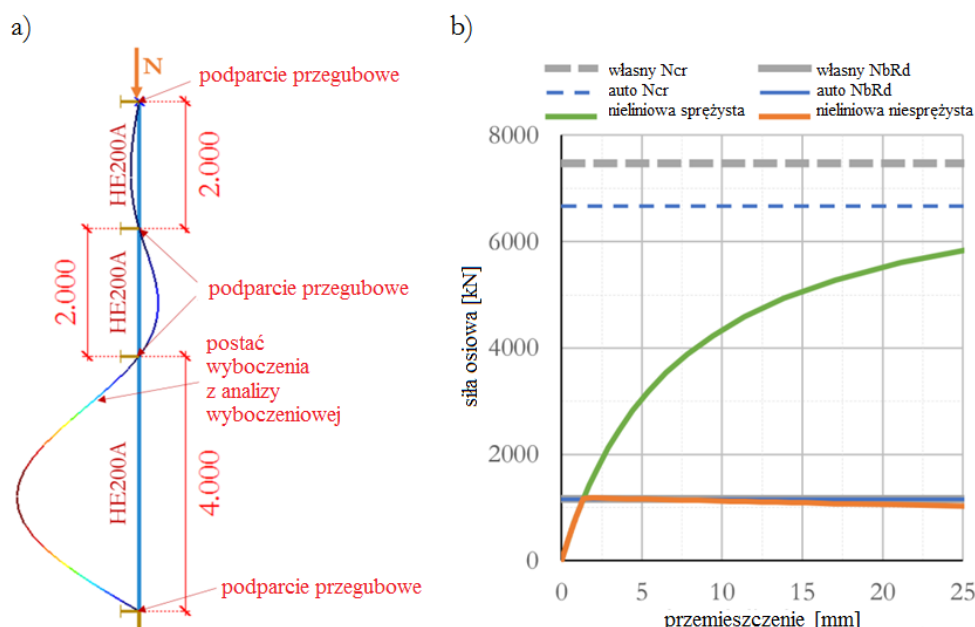


Rysunek 15. Określenie czy Narzędzie AutoNcr ma uwzględniać siły osiowe z programu AxisVM.

4.2.3. PODPARCIE W KILKU PUNKTACH

W tym przykładzie analizowany jest słup podparty w czterech punktach: górny i środkowy segment jest równy połowie długości segmentu dolnego (Rysunek 16a). Siła osiowa jest jednakowa na całej wysokości słupa. Ponieważ siły wewnętrzne są jednakowe we wszystkich segmentach, wartości N_{cr} są również jednakowe. **Należy jednak zauważyć, że współczynniki wyboczenia giętnego są mocno uzależnione od interakcji między segmentami elementu.** Podobnie jak w poprzednim przykładzie, dolny segment jest podparty przez segmenty znajdujące się powyżej (porównaj $K_{y,dół} = 0,8$ oraz $K_{y,góra} = 1,6$ do Tabeli 6). Istotna różnica w tym przypadku wynika z następującej właściwości: górne segmenty są krótsze, a więc powinny wybaczać się przy znacznie wyższej sile N_{cr} niż dla przypadku słupa swobodnie podpartego. Ich połączenie z elementem o mniejszej sztywności giętniej (segment dolny) czyni je bardziej wrażliwe na wyboczenie i zmniejsza odpowiadające wartości N_{cr} .

Wyniki otrzymane z różnych analiz przedstawione są na Rysunku 16b oraz w Tabeli 7. Porównując wyniki przeprowadzonych analiz do referencyjnych wyników otrzymanych z analizy wyboczeniowej widzimy dobrą zbieżność tych wyników. Należy zauważyć, że ze względu na jednorodny rozkład siły normalnej Narzędzie AutoNcr w tym przykładzie może być wykorzystane bez uwzględniania rzeczywistych sił osiowych w słupach (patrz powyżej Rysunek 15).



Rysunek 16. Analiza wyboczeniowa słupa podpartego w kilku punktach. a) Dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

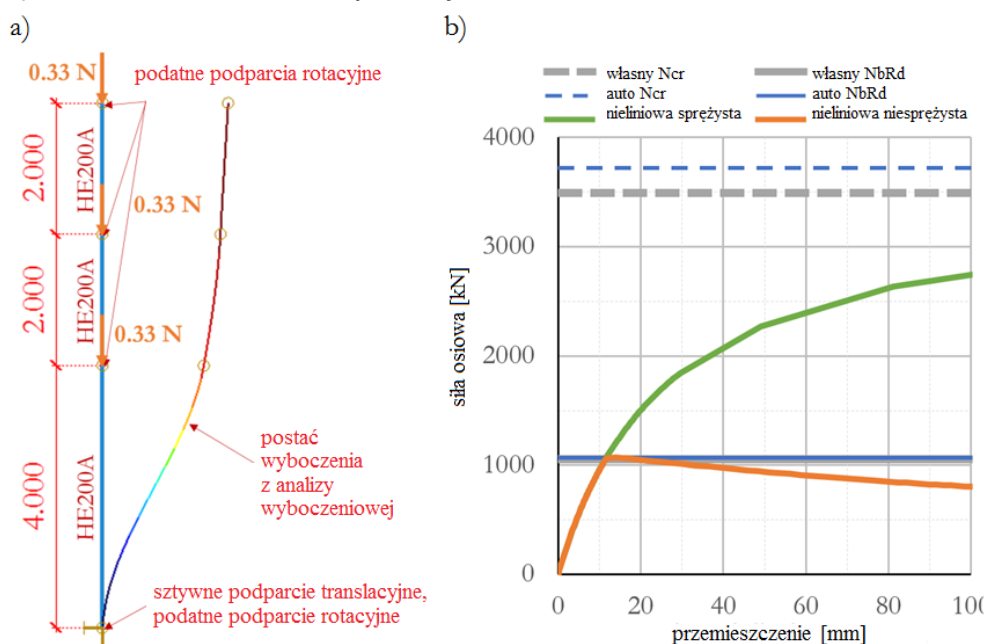
Tabela 7. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa podpartego w kilku punktach. Siły podano w kN.

		K_y	N_{cr}	$NbRd$
GÓRA / ŚRODEK	własny	1.60	7474	1166
	AutoNcr	1.67	6668	1154
	nieliniowa sprężysta	-	7612	1177
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1180
DÓŁ	własny	0.80	7474	1166
	AutoNcr	0.85	6668	1154
	nieliniowa sprężysta	-	7612	1177
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1180

4.2.4. ZŁOŻONY ZESTAW PODPÓR Z ODCINKOWO STAŁYM OBCIĄŻENIEM OSIOWYM

Ostatni przykład w tym Rozdziale dotyczy układu konstrukcyjnego bliskiego codziennej praktyce projektowej. Słup posiada cztery podatne podparcia rotacyjne, które reprezentują podstawę słupa i połączenia belek ze słupem w trzech poziomach. Sztywności obrotowe podpór wynoszą $5x$, $2x$, $2x$, i $1/8x$ sztywności giętej dolnej części słupa ($4EI/L_{dół}$) odpowiednio dla podstawy słupa i kolejnych poziomów belek (Rysunek 17a). Obciążenie osiowe o wartości $0,33\text{ N}$ przyłożono na każdym poziomie połączeń słupa z belkami. Prowadzi to do odcinkowo stałego rozkładu obciążenia osiowego słupa, które jest typowym obciążeniem słupa w standardowym układzie ramowym. Należy zauważyć, że słup posiada stały przekrój poprzeczny, co nie jest typowym rozwiązaniem. Modelowanie przypadku ze skokowo zmiennym przekrojem poprzecznym słupa zostało omówione w Rozdziale 4.2.6. Wpływ efektów drugiego rzędu jest znaczący z uwagi na to, że tylko podstawa słupa zapewnia podparcie na przesuw boczny. Słup rozpatrywany jest, więc jako element przechyłowy (szczegóły patrz Rozdział 4.1.2).

Wyniki przeprowadzonych analizy zostały podsumowane na Rysunku 17b oraz w Tabeli 8. Interakcja pomiędzy segmentami słupa jest podobna do interakcji opisanej w poprzednim przykładzie. A mianowicie dolny segment słupa jest podparty przez środkowy i górny segment. Nieliniowa analiza potwierdza, że dolny segment jest krytycznym elementem analizowanego układu. Wszystkie analizy zapewniają należyłą dokładność wyników dla wszystkich segmentów słupa. Potwierdza to, że nośność ze względu na wyboczenie gięte słupa ze złożonymi warunkami podparcia i obciążenia może być określona przez Narzędzie AutoNcr z wystarczającą dokładnością.



Rysunek 17. Analiza wyboczeniowa słupa ze złożonym zestawem podpór, obciążonego odcinkowo stałą siłą osiową. a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 8. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa ze złożonym zestawem podpór i obciążonego odcinkowo stałą siłą osiową. Siły podano w kN. (wartości N_{bRd} w nawiasach odpowiadają globalnemu zniszczeniu konstrukcji. Dany element niekoniecznie musi ulec zniszczeniu przy tym poziomie obciążenia).

		Ky	Ncr	NbRd
GÓRA	własny	4.06	1163	721.2
	AutoNcr	3.94	1234	745.2
	nieliniowa sprężysta	-	1169	(359.1)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(355.8)
ŚRODEK	własny	2.87	2326	964.3
	AutoNcr	2.78	2478	981.2
	nieliniowa sprężysta	-	2338	(718.2)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(711.7)
DÓŁ	własny	1.17	3493	1058
	AutoNcr	1.13	3720	1070
	nieliniowa sprężysta	-	3508	1078
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1069

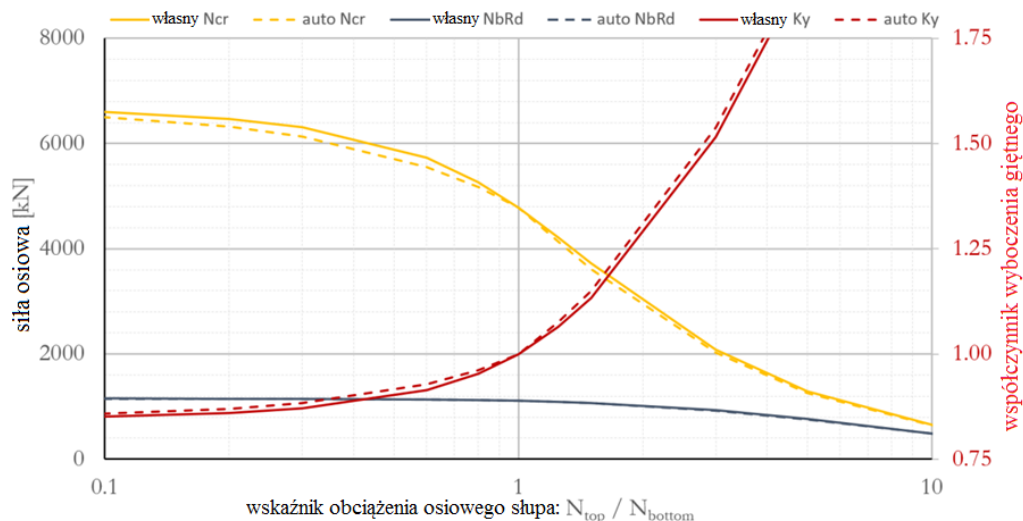
4.2.5. DOKŁADNOŚĆ: ODCINKOWO STAŁA SIŁA ŚCISKAJĄCA I RÓŻNE DŁUGOŚCI WZGLĘDNE

W tym rozdziale na przykładzie dwóch przykładów zostanie przedstawiona dokładność *Narzędzia AutoNcr*. Pierwszy przypadek analizuje wpływ rozkładu siły ściskającej na długości słupa podpartego przegubowo w trzech punktach. Wykresy na *Rysunku 18* dotyczą dolnego segmentu słupa i porównują wartości N_{cr} , N_{bRd} oraz K_y otrzymane z analizy wyboczeniowej z wynikami otrzymanymi *Narzędziem AutoNcr*. Należy zauważyć, że przykłady w Rozdziałach 4.2.1 i 4.2.2 są szczególnymi przypadkami tego zadania dla wartości $N_{góra}/N_{dół}$ równymi odpowiednio 1,0 oraz 0,5.

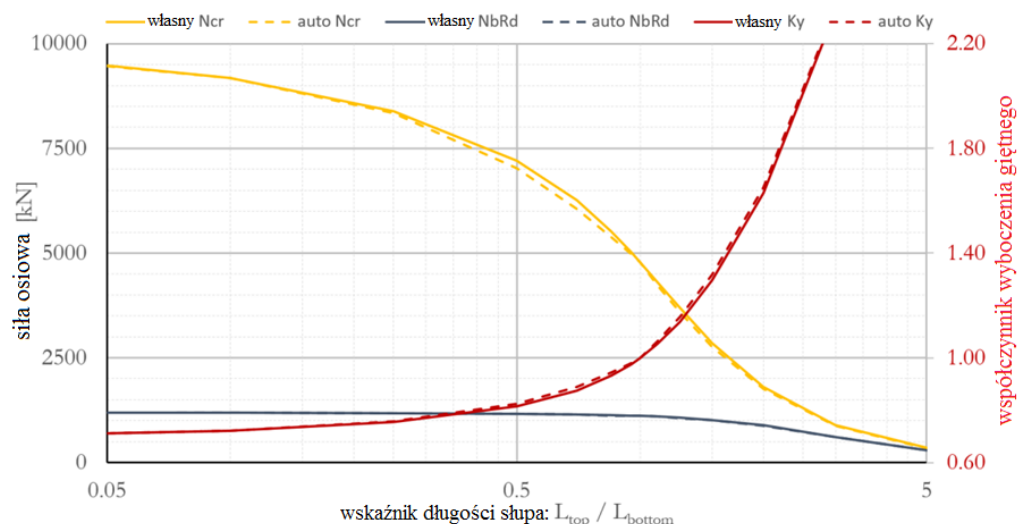
Dwa skrajne przypadki na *Rysunku 18* dotyczą słupa nieobciążonego osiowo na poziomie dolnego lub górnego segmentu. Obydwa przypadki są równoważne z przypadkiem swobodnie podpartego segmentu z dodatkową sztywnością obrotową na jednej z podpór.

Rysunek przedstawia parametry wyboczenia giętnego dolnego segmentu słupa. W przypadku, gdy wskaźnik obciążenia osiowego wzrasta ponad wartość 1,0, a dolny segment otrzymuje mniejsze obciążenie, jego rola jako elementu podpierającego znacząco rośnie. Gdy stosunek obciążenia osiowego z *Rysunku 18* zbliża się do nieskończoności, to wartości N_{cr} oraz N_{bRd} dolnego segmentu dążą do zera. Ponieważ siła ściskająca (N_{Ed}) dąży do zera szybciej niż N_{bRd} , to dolny segment nie będzie krytycznym elementem po prawej stronie spektrum wartości stosunku obciążenia osiowego. Jest to istotna obserwacja, która zostanie zweryfikowana w Rozdziale 4.3.

Narzędzie AutoNcr przybliża z niewielkim błędem wyniki analizy wyboczeniowej dla całego zakresu wskaźnika obciążenia osiowego. Maksymalne błędy wynosiły 1,55%, 3,20%, oraz 1,50% dla odpowiednich wartości K_y , N_{cr} , oraz N_{bRd} .



Rysunek 18. Cechy wyboczenia giętnego słupa podpartego w trzech punktach i obciążonego odcinkowo stałym obciążeniem osiowym. Linie ciągłe odnoszą się do wartości otrzymanych z analizy wyboczeniowej; a linie przerywane odnoszą się do wyników otrzymanych za pomocą Narzędzia AutoNcr.



Rysunek 19. Cechy wyboczenia giętnego słupa podpartego w trzech punktach dla różnych długości górnego segmentu. Linie ciągłe odnoszą się do wartości otrzymanych z analizy wyboczeniowej; a linie przerywane odnoszą się do wyników otrzymanych za pomocą Narzędzia AutoNcr.

Drugi przypadek, dla którego wyniki przedstawiono na *Rysunku 19*, uwzględnia wpływ względnej sztywności segmentów słupa na parametry wyboczeniowe. Geometria słupa w przykładzie wykorzystuje geometrię słupa swobodnie podpartego z Rozdziału 4.2.1 z tą różnicą, że długość segmentu górnego zmienia się w przedziale od 20cm do 20 m. Należy zauważyć, że otrzymana ogólna tendencja jest podobna do tej otrzymanej w przykładzie wcześniejszym (patrz *Rysunek 18*). Zależność ta nie jest jednak identyczna. W przypadku, gdy długość segmentu górnego zbliża się do zera (lewa część diagramu) jej sztywność zbliża się do nieskończoności. Dlatego, zachowanie dolnego segmentu słupa odpowiada zachowaniu słupa z utwierdzeniem i podparciem przegubowym, którego współczynnik wyboczenia giętnego wynosi 0,699.

W przypadku, gdy długość górnego segmentu zwiększa się, jego sztywność giętą zbliża się do sztywności giętej dolnego segmentu. Są one identyczne dla wskaźnika długości słupa równego 1,0.

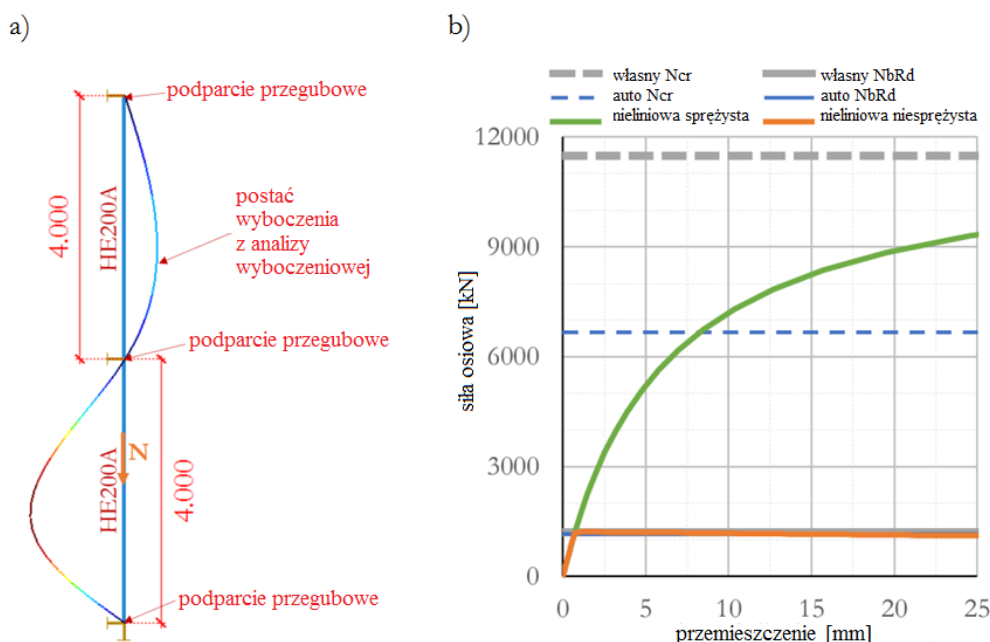
Po przekroczeniu tej wartości wskaźnika długości słupa ($> 1,0$) dolny segment przyjmuje funkcję podpierającą górny segment. Wyjaśnia to, dlaczego K_y segmentu dolnego przekracza wartość 1,0 w tej części diagramu. W przypadku, gdy długość górnego segmentu zbliża się do nieskończoności, siła N_{cr} dąży do zera. Mimo że, wartość N_{bRd} dolnego segmentu zbliża się do zera, odpowiadająca siła osiowa N_{Ed} jest zawsze mniejsza. W takich przypadkach górny segment zawsze będzie krytycznym elementem.

Narzędzie AutoNcr przybliża wyniki analizy wyboczeniowej z niewielkim błędem dla całego zakresu wskaźnika długości słupa. Maksymalne wartości błędu wynoszą odpowiednio 1,70%, 3,50%, oraz 1,05% dla K_y , N_{cr} , oraz N_{bRd} . Maksymalne wartości błędów są akceptowalne.

4.2.6. OGRANICZENIA STOSOWANIA: NIERÓWNOMIERNE OBCIĄŻENIE OSIOWE

Ten przykład pokazuje ograniczenia w stosowaniu Narzędzia AutoNcr. Mimo, że narzędzie działa dobrze w przypadku odcinkowo stałego obciążenia siłą osiową, to nie jest zaprojektowane, aby przybliżać wpływy bardziej ogólnego rozkładu obciążenia. Słup na Rysunku 20a jest obciążony w środku wysokości dolnego segmentu. Powoduje to nierównomierny rozkład obciążenia osiowego na długości dolnego segmentu. Wyznaczenie w takim przypadku parametrów wyboczenia giętnego jest dużo trudniejsze.

Wyniki analizy wyboczeniowej uznano za rozwiązania referencyjne (Tabela 9). Należy zauważyć, że górny segment posiada nieskończoną długość wyboczeniową i zerową siłę N_{cr} , ponieważ jej obliczeniowa siła osiowa N_{Ed} jest równa zero (zagadnienie podobne do skrajnie prawego przypadku na wykresie Rysunku 18). Wyniki otrzymane z Narzędzia AutoNcr są ograniczone maksymalnie do wartości $K_y = 10,0$, aby zapewnić brak wpływu na inne części obliczeń, które miałyby miejsce przy bardzo dużych wartościach K_y . Ponadto wyniki dla $K_y = 10,0$ z praktycznego punktu widzenia są zbliżone do przypadku nieskończonej wartości K_y , dopóki wartości N_{Ed} są bardzo małe lub gdy element jest rozciągany.



Rysunek 20. Analiza wyboczeniowa słupa z niejednorodnym obciążeniem siłą osiową. a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 9. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa bez jednorodnego rozkładu siły osiowej. Siły podano w kN.

		Ky	Ncr	NbRd
GÓRA	własne	∞	0	0
	AutoNcr	10.0	47.8	44.9
	nieliniowa sprężysta	-	0	(0.0)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(0.0)
DÓŁ	własne	0.646	11478	1205
	AutoNcr	0.847	6668	1154
	nieliniowa sprężysta	-	11429	1187
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1215

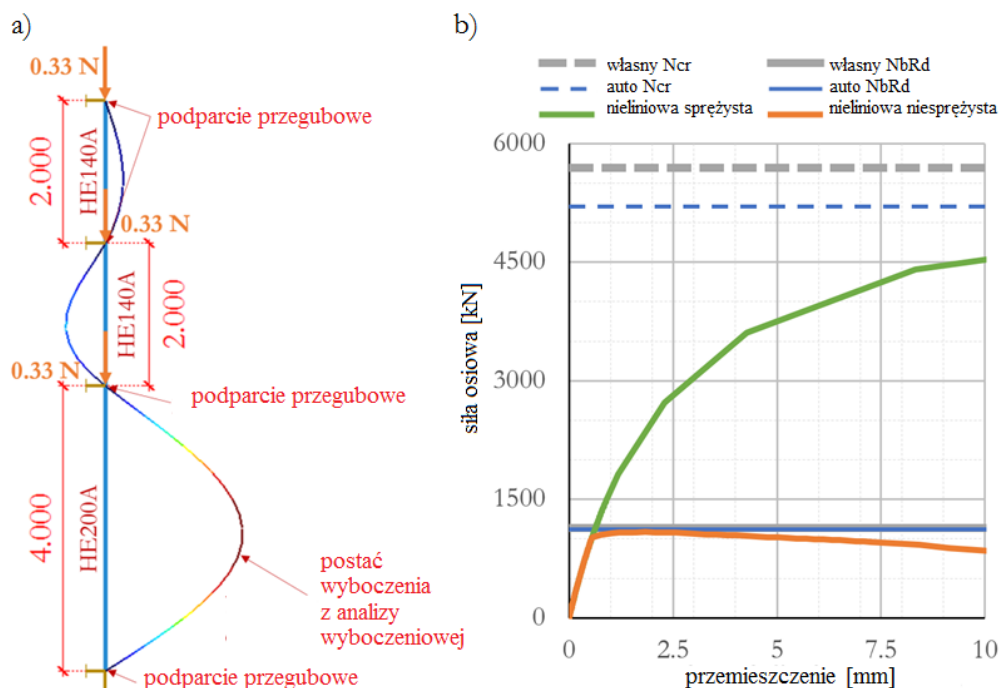
Ograniczenia *Narzędzia AutoNcr* uwiadcniają się dla dolnego segmentu. Pomimo że, siła osiowa wprowadzona została w środku wysokości segmentu dolnego, narzędzie nie weźmie tego pod uwagę. Narzędzie zawsze uwzględnia maksymalną siłę osiową z segmentu i zakłada jej równomierny rozkład. W ten sposób ustala parametry wyboczenia giętnego jak dla słupa obciążonego na górze dolnego segmentu. To podejście zawsze prowadzi do rozwiązań konserwatywnych. Warto zauważyć, że różnice w wartościach K_y oraz N_{cr} są znaczące, a pomimo to przy tym bezpiecznym oszacowaniu wartość N_{bRd} jest tylko delikatnie niedoszacowana. Niemniej jednak, ważne jest, aby rozpoznawać te sytuacje z obciążeniem i stosować *Narzędzie AutoNcr* tylko wtedy, gdy takie konserwatywne rozwiązania są dopuszczalne.

4.2.7. OGRANICZENIA STOSOWANIA: ODCINKOWO ZMIENNY PRZEKRÓJ SŁUPA

Drugi przykład ograniczeń stosowania dotyczy nierównomiernego przekroju poprzecznego słupa. W tej części znajdują się dwa przykłady: pierwszy prezentuje sytuację, gdzie *Narzędzie AutoNcr* dostarcza właściwe wyniki, a drugi pokazuje konfigurację dla wyników niewłaściwych.

Pierwszy przykład jest podobny do złożonego przypadku z Rozdziału 4.2.4, ale podpory są przegubowe a cały słup nieprzechyłowy. Górny i środkowy segment jest wykonany z HE140A (*Rysunek 21a*). Ponieważ *Narzędzie AutoNcr* zakłada, że elementy konstrukcyjne posiadają stały przekrój, dzieli on w tym przypadku słup na dwa elementy. Mimo, że elementy te w *Narzędziu AutoNcr* wpływają na siebie poprzez połączenie w górnym węźle z dolnym segmentem, to ich wspólne zachowanie jest tylko przybliżone za pomocą podejścia zalecanego w ECCS (więcej szczegółów w Rozdziale 3 oraz 4.3). W związku z tym, wpływ górnego segmentu na zachowanie dolnego rozpatrywany jest z mniejszą dokładnością niż w przypadku słupa o stałym przekroju.

Rysunek 21b oraz *Tabela 10* pokazują, że wyniki *Narzędzia AutoNcr* są wystarczająco dokładne dla wszystkich segmentów w tej konfiguracji. Prawidłowo obrazuje to też fakt, że błąd jest spodziewany w środkowej części – co jest również potwierdzone przez analizę nieliniową.



Rysunek 21. Analiza wyboczeniowa słupa ze zmiennym odcinkowo przekrojem poprzecznym – pierwszy przykład. a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 10. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa o zmiennym przekroju – pierwszy przypadek. Siły podano w kN. (wartości N_{bRd} w nawiasach odpowiadają globalnemu zniszczeniu konstrukcji. Dany element niekoniecznie musi ulec zniszczeniu przy tym poziomie obciążenia).

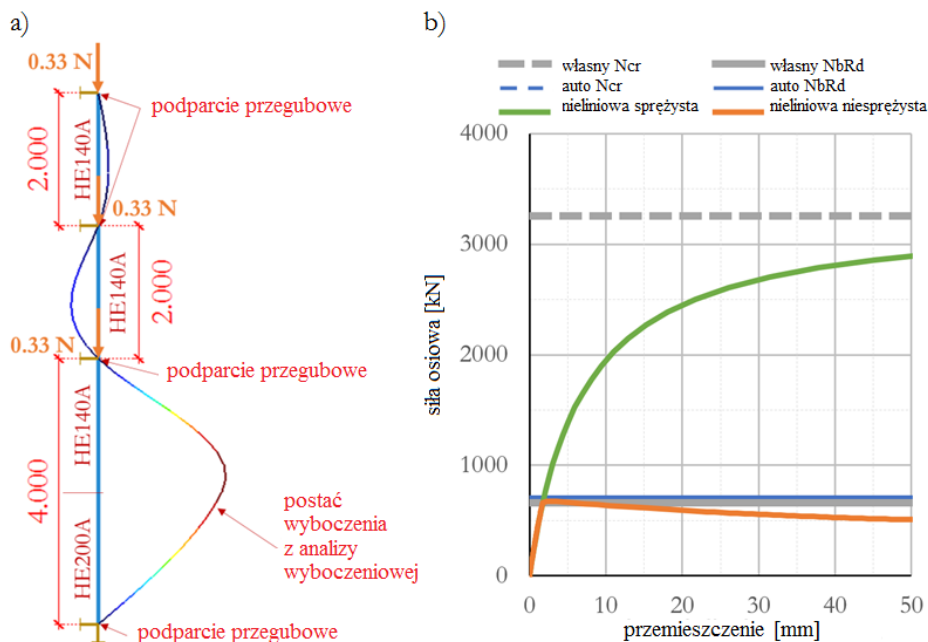
		K_y	Ncr	NbRd
GÓRA	własne	1.68	1896	609.0
	AutoNcr	1.61	2063	618.7
	nieliniowe sprężyste	-	1918	(339.3)
	nieliniowe niesprężyste	-	-	(361.7)
ŚRODEK	własne	1.19	3792	671.5
	AutoNcr	1.14	4120	677.0
	nieliniowe sprężyste	-	3835	678.5
	nieliniowe niesprężyste	-	-	723.4
DÓŁ	własne	0.92	5693	1135
	AutoNcr	0.96	5202	1122
	nieliniowe sprężyste	-	5759	(1019)
	nieliniowe niesprężyste	-	-	(1086)

Drugi przypadek bazuje na konfiguracji słupa z *Rysunku 22a*. Należy zauważyć, że połowa dolnego segmentu posiada przekrój HE140A a druga połowa przekrój HE200A. Ta niewielka zmiana prowadzi do znacznie innego, niż w pierwszej analizie, zachowania słupa (patrz różnice w postaci wyboczenia). Siła N_{cr} słupa jest zredukowana znacząco, a nieliniowa analiza wyboczeniowa potwierdza, że krytyczny przekrój przechodzi na górną część dolnego segmentu (*Tabela 11*).

Aktualnie, taki przypadek nie może być właściwie uwzględniony przez *Narzędzie AutoNcr*. *Narzędzie* identyfikuje dwa odrębne elementy w tym przykładzie, które połączone są w środku dolnego

segmentu. Ponieważ jest to słup nieprzechyłowy to narzędzie zakłada podpory boczne we wszystkich połączeniach – uwzględniając to, które znajduje się pomiędzy dwoma elementami. Założenie to powoduje błędne wyznaczenie parametrów wyboczenia giętnego. Należy zauważyć, że popełniony błąd nie leży po stronie bezpiecznej.

Otrzymane wyniki podkreślają znaczenie znajomości ograniczeń *Narzędzia AutoNcr*. Pokazują także, że powinno się go stosować wówczas, gdy oczekuje się, że dostarczy wystarczająco dokładnych wyników. Ponieważ drugi przytoczony przypadek nie jest zbyt częsty w praktyce inżynierskiej, odpowiednie ograniczenia *Narzędzia AutoNcr* uznawane są za akceptowalny kompromis w celu osiągnięcia szybszych i bardziej wydajnych obliczeń w pozostałych, częściej spotykanych sytuacjach.



Rysunek 22. Analiza wyboczeniowa słupa ze zmiennym odcinkowo przekrojem poprzecznym – drugi przykład. a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 11. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa ze zmiennym odcinkowo przekrojem poprzecznym – drugi przykład. Siły podano w kN. (wartości N_{bRd} w nawiasach odnoszą się do globalnej postaci zniszczenia. Dany element nie koniecznie musi zostać zniszczony przy tym poziomie obciążenia).

		Ky	Ncr	NbRd
GÓRA	własny	2.22	1083	523.2
	AutoNcr	1.44	2575	641.1
	nieliniowa sprężysta	-		(223.3)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(224.0)
ŚRODEK	własny	1.57	2166	624.0
	AutoNcr	1.02	5156	690.4
	nieliniowa sprężysta	-		(446.6)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(447.9)
DÓŁ HE140A	własny	1.28	3253	660.5
	AutoNcr	0.83	7735	709.4
	nieliniowa sprężysta	-		670.6
	nieliniowa niesprężysta	-	-	672.6
DÓŁ HE200A	własny	2.43	3253	1043.9
	AutoNcr	1.17	3918	1219.6
	nieliniowa sprężysta	-		(670.6)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(672.6)

4.3. SŁUPY PODPARTE PRZEZ INNE ELEMENTY

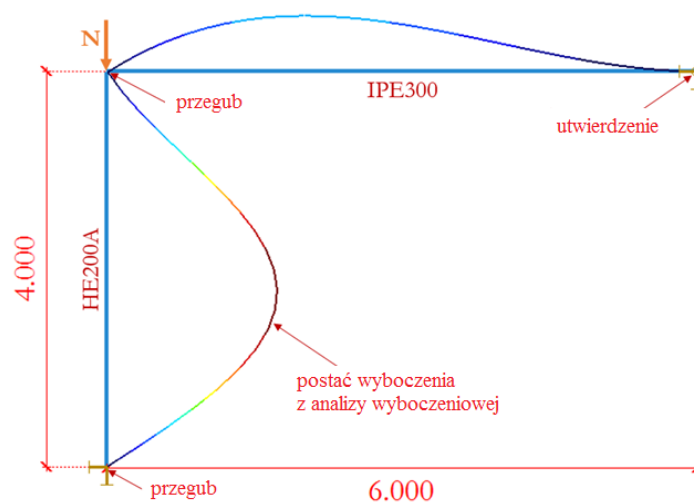
Poniższe przykłady przedstawiają zastosowanie *Narzędzia AutoNcr* do analizy słupa podpartego przez inne elementy konstrukcyjne. Parametry (np.: przekrój słupa, charakterystyka materiału, ustawienia analizy) są identyczne do tych przyjętych we wcześniejszych przykładach.

4.3.1. PROSTA BELKA JAKO PODPORA

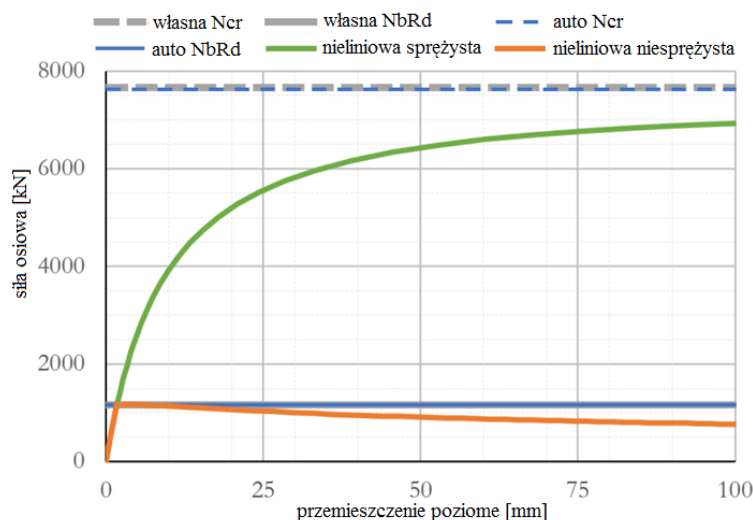
Pierwszy przykład pokazuje podstawową konfigurację: nieprzechyłowy słup przegubowo podparty i przegubowo połączony z pojedynczą belką. Wyniki powinny odpowiadać tym z *Rysunku 11*, gdzie był analizowany słup ze zmiennymi podatnościami podpór. Należy zauważyć, że sztywność podparcia górnego w takim przypadku zależy od długości belki, jej warunków podparcia i przekroju.

Układ konstrukcyjny przedstawiono na *Rysunku 23a*, a wyniki zestawiono na *Rysunku 23b* i w *Tabeli 12*. Odpowiedź słupa została prawidłowo przybliżona przez *Narzędzie AutoNcr*. Ponieważ belka nie jest ściskana, dlatego narzędzie automatycznie ograniczyło jej wartość K_y do 10,0. Podobnie jak w przykładzie z Rozdziału 4.2.6 nie przewiduje się, aby belka uległa zniszczeniu z powodu wyboczenia giętnego, a błąd w określeniu jej parametrów nie jest istotny z praktycznego punktu widzenia.

a)



b)



Rysunek 23. Analiza wyboczeniowa słupa podpartego belką. a) dane wejściowe i postać wyboczenia;
b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

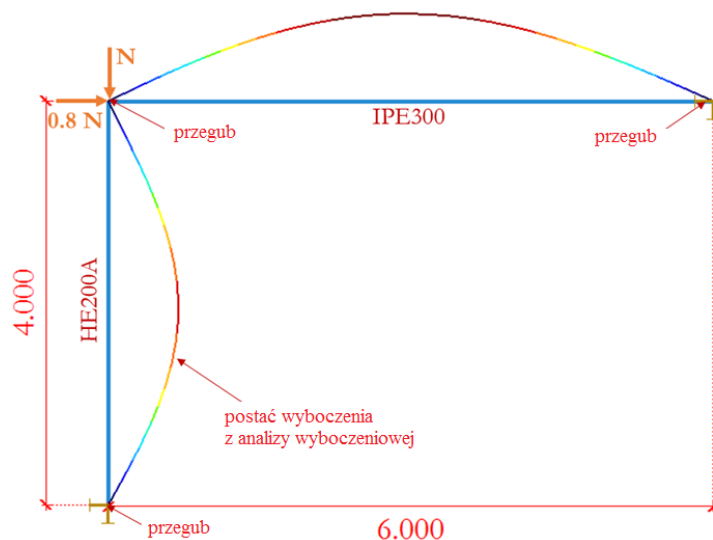
Tabela 12. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa podpartego belką. Siły podano w kN. (wartość N_{bRd} w nawiasie dotyczy globalnej postaci zniszczenia. Podane elementy niekoniecznie zniszczą się przy tych poziomach obciążenia).

		Ky	Ncr	NbRd
BELKA	własny	∞	0	0
	AutoNcr	10.0	48.1	46.2
	nieliniowa sprężysta	-	0	(0.0)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(0.0)
SŁUP	własny	0.79	7660	1169
	AutoNcr	0.79	7627	1168
	nieliniowa sprężysta	-	7095	1167
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1172

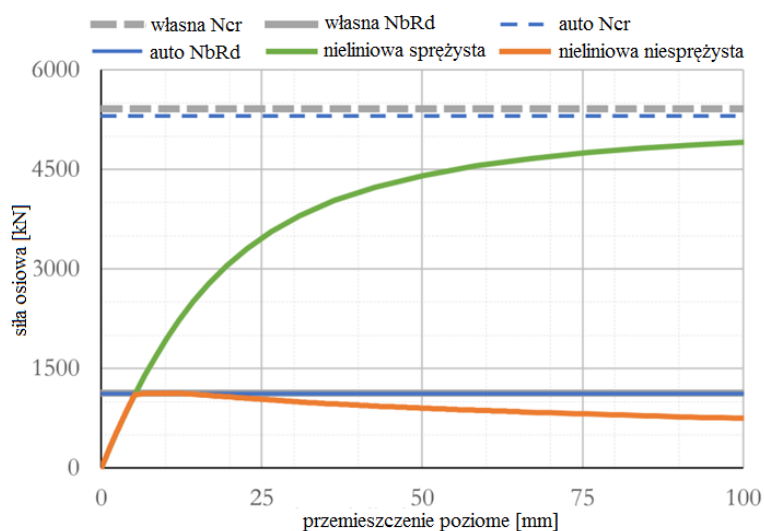
4.3.2. ŚCISKANA BELKA PODPIERAJĄCA

W tym przykładzie przedstawiony jest wpływ na sztywność podparcia występowania siły ściskającej w elemencie podpierającym. Układ konstrukcyjny jest podobny do wcześniejszego przypadku, poza wprowadzonym podparciem przegubowym na drugim końcu belki. Ponadto dodano skupioną siłę poziomą. Wielkość siły poziomej wynosi 80% wartości siły pionowej (Rysunek 24a).

a)



b)



Rysunek 24. Analiza wyboczeniowa słupa podpartego belką ściskaną siłą osiową. a) dane wejściowe i postać wyboczenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

Tabela 13. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa podpartego belką ściskaną siłą osiową. Siły podano w kN. (wartość N_{bRd} w nawiasach odpowiada globalnej postaci zniszczenia. Podane elementy niekoniecznie zniszczą się przy tych poziomach obciążenia).

		Ky	Ncr	NbRd
BELKA	własny	1.06	4326	1152
	AutoNcr	1.04	4475	1156
	nieliniowa sprężysta	-	4127	(890.0)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(901.5)
SŁUP	własny	0.94	5408	1128
	AutoNcr	0.95	5301	1125
	nieliniowa sprężysta	-	5159	1113
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1127

Otrzymane wyniki zostały podsumowane na *Rysunku 24b* oraz w *Tabeli 13*. Siła ściskająca w belce redukuje jej dostępną sztywność podparcia, prowadząc do większych wartości K_y i mniejszych wartości N_{cr} podpieranego słupa (Ta sama konfiguracja, lecz bez wprowadzonej siły ściskającej w elemencie podpierającym daje następujące wartości w słupie: $K_y = 0,81$ i $N_{cr} = 7269$ kN). Należy zauważyć, że podobne rozumowanie można przeprowadzić dla belki: chociaż jest zamocowana przegubowo na jednym końcu, a na drugim podparta przez słup, dla warunków jak na *Rysunku 24a*, jej charakterystyka wyboczeniowa wyrażona jest przez $K_y = 1,06$. **Siła ściskająca w słupie ogranicza mu zapewnienie sztywności obrotowej belce.** Z drugiej strony, to słup potrzebuje podparcia belki, co pogarsza sytuację wyboczeniową belki w porównaniu do sytuacji, w której byłaby zwykła podpora przegubowa.

Parametry wyboczeniowe obu elementów zostały właściwie oszacowane przez *Narzędzie AutoNcr*.

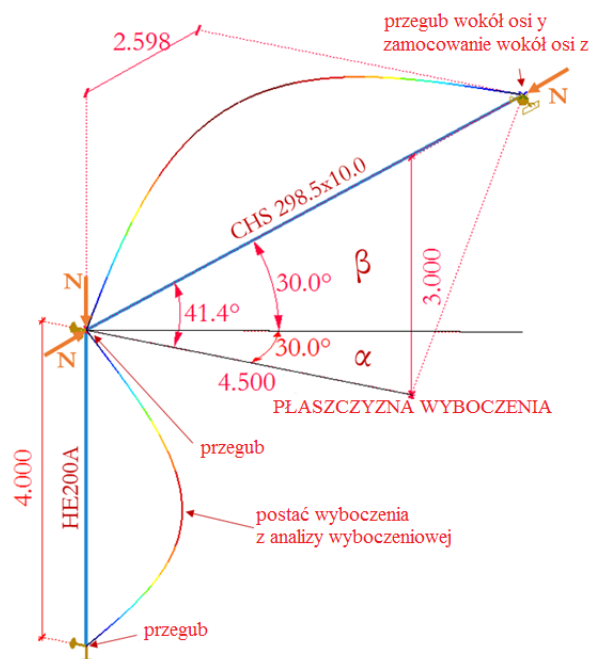
4.3.3. NACHYLONA BELKA PODPIERAJĄCA

Kąt pomiędzy łączonymi elementami również wpływa na parametry wyboczeniowe. Ilustruje to poniższy przykład. Belka z wcześniejszego zadania jest obrócona w obu płaszczyznach o kąt 30° : w płaszczyźnie wyboczenia ramy o kąt (β) oraz w płaszczyźnie poziomej (z pł. wyboczenia) o kąt (α), patrz *Rysunek 25a*. Obrót elementu podpierającego spowodował ograniczoną możliwość zapewnienia sztywności obrotowej podieranemu słupowi. Należy zwrócić uwagę, że przekrój belki został zmieniony na przekrój rurowy (CHS) w celu uniknięcia wyboczenia wokół słabszej osi przekroju IPE. Założono, że jest to bardziej realne niż obrót przekroju IPE o 90° w celu uzyskania tego samego efektu. Wyboczenie wokół słabszej osi przekrojów IPE jest dobrze uwzględniane przez *Narzędzie AutoNcr*, ale występuje niezależnie od wyboczenia wokół silniejszej osi słupa. Tak więc, jego analiza ma ograniczone zastosowanie dla tego przykładu.

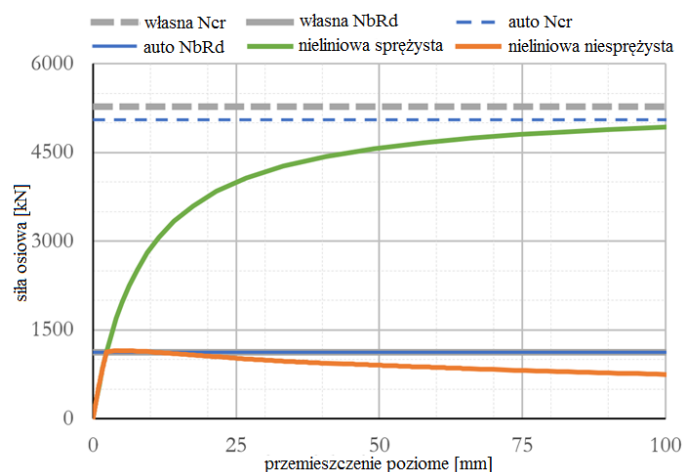
Wyniki przedstawione na *Rysunku 25b* oraz w *Tabeli 14* pokazują, że siła ściskająca i obrót belki w znaczący sposób redukuje zdolności zapewnienia sztywności obrotowej przez element podpierający. Wykorzystując tą samą belkę o przekroju CHS, ale bez siły ściskającej otrzymamy w słupie następujące wartości: $K_y = 0,82$ oraz $N_{cr} = 7156$ kN. Jeżeli belka nie będzie nachylona, lecz ustawiona pod kątem prostym do słupa otrzymamy lepsze parametry wyboczeniowe słupa: $K_y = 0,80$ i $N_{cr} = 7430$ kN. Dalszy obrót belki od płaszczyzny wyboczeniowej słupa znacząco redukuje jej udział i uzyskane siły krytyczne N_{cr} dla słupa.

Narzędzie AutoNcr poprawnie przybliża parametry wyboczenia giętnego obu elementów. Wyniki z tego przykładu potwierdzają, że narzędzie radzi sobie z nachyleniem elementów podpierających i właściwie redukuje odpowiadające wartości sił N_{cr} .

a)



b)



Rysunek 25. Analiza wybożeniowa słupa podpartego nachyloną belką. a) dane wejściowe i postać wybożenia; b) wykresy siła osiowa - maksymalne przemieszczenie poziome dla różnych analiz.

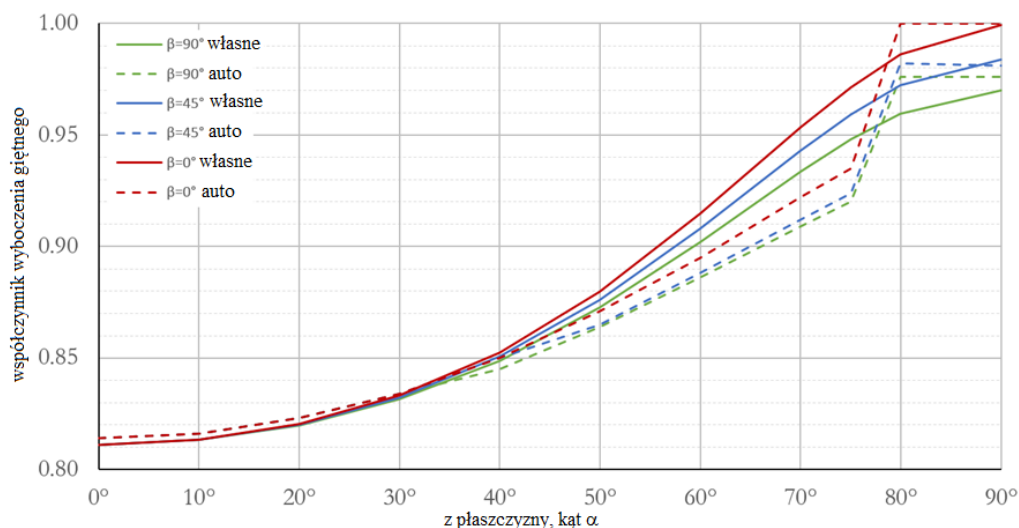
Tabela 14. Podsumowanie wyników analizy wybożeniowej słupa podpartego nachyloną belką. Siły podano w kN. (wartość N_{bRd} w nawiasach odpowiada globalnej postaci zniszczenia. Podane elementy niekoniecznie zniszczą się przy tych poziomach obciążenia).

		K_y	Ncr	NbRd
BELKA	własny	1.01	5277	1864
	AutoNcr	1.01	5263	1863
	nieliniowa sprężysta	-	5242	(1142)
	nieliniowa niesprężysta	-	-	(1149)
SŁUP	własny	0.95	5277	1125
	AutoNcr	0.97	5053	1119
	nieliniowa sprężysta	-	5242	1142
	nieliniowa niesprężysta	-	-	1149

4.3.4. DOKŁADNOŚĆ: NACHYLONA BELKA PODPIERAJĄCA

W tym rozdziale przedstawiono dokładność *Narzędzia AutoNcr* wykorzystanego do analizy słupów podpartych przez nachylone belki. Zostały przeanalizowane różne konfiguracje na podstawie przykładu z Rozdziału 4.3.2, pomijając przypadek obciążenia osiowego w elemencie podpierającym. Ponieważ nachylenie w płaszczyźnie układu nie ma znaczącego wpływu na parametry wyboczeniowe słupa nieprzechyłowego, zostały uwzględnione tylko trzy odrębne wartości kąta β . Na *Rysunku 26* pokazano, że większy wpływ ma wychylenie z płaszczyzny (α). W miarę jak belka jest coraz bardziej wychylana z płaszczyzny jej zdolność do zapewnienia sztywności obrotowej podparcia stopniowo zanika i słup staje się elementem swobodnie podpartym.

Stopniowa redukcja sztywności obrotowej podparcia zapewniana przez belkę jest właściwie uchwycona przez *Narzędzie AutoNcr*. Maksymalny błąd występuje dla konfiguracji $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 0^\circ$ i wynosi mniej niż 4%. Błąd ten jest akceptowalny z punktu widzenia zastosowań inżynierskich. Należy zauważyć, że pominięcie wpływu nachylenia belki może prowadzić do błędu sięgającego ponad 10% wartości K_y .



Rysunek 26. Współczynnik wyboczenia giętnego słupa podpartego przez nachyloną w płaszczyźnie pod kątem (β) i z płaszczyzny pod kątem (α). Linie ciągłe odnoszą się do wyników z analizy wyboczeniowej; linie przerywane odnoszą się do wyników otrzymanych za pomocą *Narzędzia AutoNcr*.

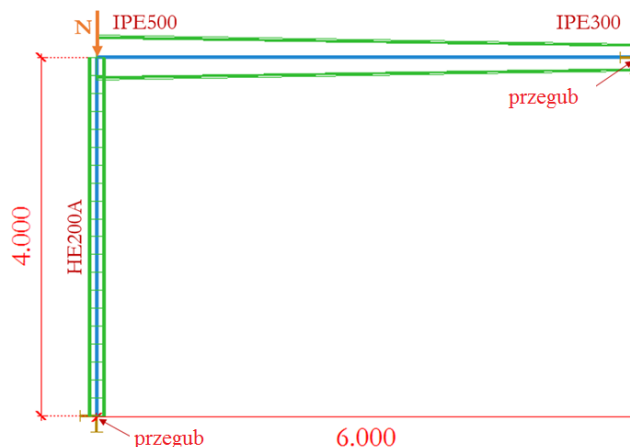
4.3.5. OGRANICZENIA STOSOWALNOŚCI: BELKA PODPIERAJĄCA O ZMIENNEJ LINIOWO SZTYWNOŚCI

Pokazano już, że *Narzędzie AutoNcr* nie zawsze zapewnia dokładne rozwiązanie dla elementów o niestałym przekroju poprzecznym (patrz Rozdział 4.2.7). Chociaż nieciągłe zmiany przekrojów są dozwolone, ale niezalecane, to automatyczne wyznaczanie parametrów wyboczenia giętnego dla elementów o liniowo zmiennym przekroju jest całkowicie niedostępne. Jednakże podparcie zapewnione przez taki element może być brane pod uwagę w analizie pozostałych elementów. Odpowiednie ograniczenia są opisane w poniższym przykładzie.

Analizowany przykład jest podobny do wcześniejszych przykładów, ale belka podpierająca ma liniowo zmienny przekrój: zaczyna się przekrojem IPE500 a kończy przekrojem IPE300 (*Rysunek 27*). Aktualna wersja *Narzędzia AutoNcr* traktuje taki element, jako element o stałym przekroju. W celu pozostania po bezpiecznej stronie, właściwości belki zastępczej są przyjmowane tak, aby uzyskać

najbardziej niekorzystny scenariusz tj. przyjmuje się najmniejszy przekrój belki (w naszym przypadku będzie to IPE300). Wyniki przedstawiono w Tabeli 15.

Przeanalizowano dwa przypadki: pierwszy dotyczy układu przedstawionego na Rysunku 27; drugi dotyczy belki ustawionej odwrotnie. Należy zauważyć, że automatyczne obliczenia zapewniają takie same wyniki dla obu przypadków. Co więcej, otrzymane wyniki z obliczeń automatycznych są zbliżone do wyników analizy wyboczeniowej dla przypadku mniej korzystnego.



Rysunek 27. Dane wejściowe dla analizy wyboczeniowej słupa podpartego przez belkę o liniowo zmiennej sztywności.

Tabela 15. Podsumowanie wyników analizy wyboczeniowej słupa podpartego przez belkę o liniowo zmiennej sztywności. Siły podano w kN.

		Ky	Ncr	NbRd
SŁUP IPE500 > IPE300	własny	0.74	8787	1181
	AutoNcr	0.79	7743	1170
SŁUP IPE300 > IPE500	własny	0.78	7850	1171
	AutoNcr	0.79	7743	1170

W związku z tym oczekuje się, że słupy połączone z belką (o liniowo zmiennym przekroju) od strony mniejszego przekroju powinny charakteryzować się lepszym oszacowaniem parametrów wyboczenia giętnego. Obliczenia słupa połączonego z belką (o liniowo zmiennym przekroju) od strony większego przekroju dadzą wyniki konserwatywne. Błąd (zwłaszcza dla wartości N_{bRd}) jest akceptowalny.

5. PRZYKŁAD UKŁADU KONSTRUKCYJNEGO

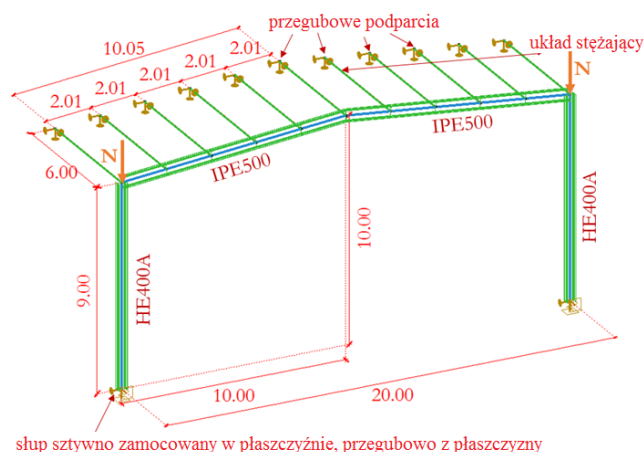
Po przeprowadzeniu szczegółowej analizy kilku, indywidualnych elementów, poniższy przykład przedstawia układ konstrukcyjny zbliżony do codziennej praktyki. Podkreśla on kilka istotnych ustawień, które są niezbędne to tego, aby uzyskać poprawne wyniki za pomocą *Narzędzia AutoNcr*.

Przykładowa konstrukcja jest wydzieloną, główną ramą układu poprzecznego hali przemysłowej. Na *Rysunku 28* przedstawiono szczegóły modelu numerycznego. Rama składa się z dwóch słupów o przekroju HE400A połączonych z belką o przekroju IPE500. Belka jest podparta z płaszczyzny w kilku punktach przez system stężeń. Stężenia są zamodelowane jako elementy kratowe z węzłami przegubowymi na końcach. Zakłada się, że elementy podparcia bocznego są wystarczająco blisko siebie, aby zapewnić zabezpieczenie przed zwichrzeniem belki. Słupy są sztywno zamocowane w płaszczyźnie ramy i przegubowo podparte z płaszczyzny. Zakłada się, że połączenie belka-słup jest sztywne.

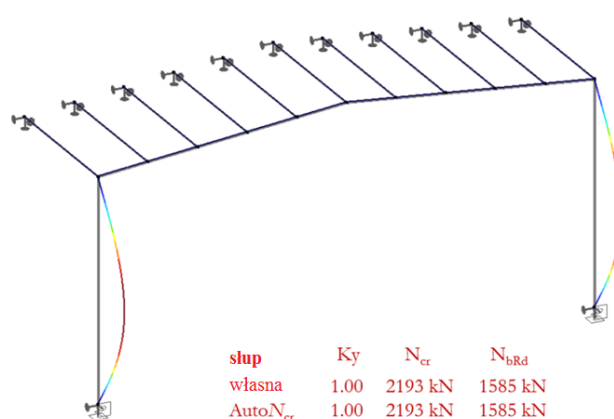
W analizie uwzględniono trzy kombinacje obciążeń. W pierwszym przypadku słupy są obciążone jednakową siłą osiową, a belka nie jest ściskana (*Rysunek 28*). W drugim przypadku słupy są nieobciążone, a rygiel jest ściskany siłą osiową (*Rysunek 31*). W trzecim przypadku słupy i rygiel zostały obciążone siłami osiowymi, w celu pokazania jak *Narzędzie AutoNcr* radzi sobie z taką interakcją.

Wyniki dla pierwszego przypadku są przedstawione na *Rysunku 29* oraz *Rysunku 30*. Wyboczenie z płaszczyzny słupów jest oczywiste w tym przypadku, bo wybaczają się tylko słupy i zachowują się one jak elementy swobodnie podparte. Ponieważ stężenia zapewniają podparcie na przesunięcie ramy z płaszczyzny, słup ustawiono jako element nieprzechyłowy w jego płaszczyźnie lokalnej x-y. *Narzędzie AutoNcr* dla tego przypadku dostarcza dokładne wyniki.

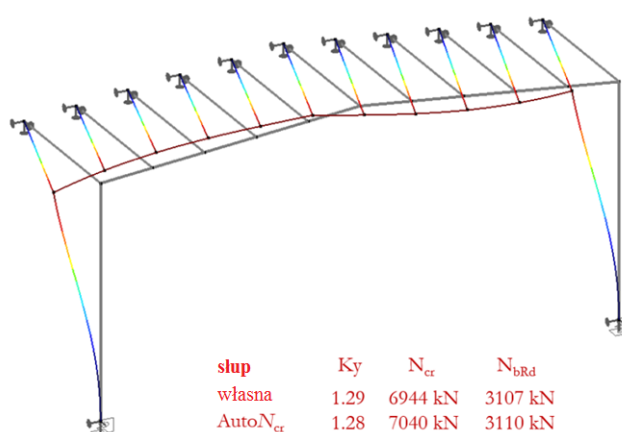
Analiza wyboczenia w płaszczyźnie układu jest zadaniem bardziej wymagającym z powodu sztywnego połączenia belki ze słupami. Górne węzły słupów nie są podparte ze względu na przesuw w płaszczyźnie ramy, stąd spodziewany jest istotny wpływ efektów drugiego rzędu na nośność elementu. Przyjęto więc i ustawiono w programie, że słup w swojej lokalnej płaszczyźnie x-z (płaszczyzna ramy) jest elementem przechyłowym. Wyniki otrzymane za pomocą *Narzędzia AutoNcr* przybliżają wyniki analizy wyboczeniowej z niewielkim błędem.



Rysunek 28. Dane wejściowe i model numeryczny analizy wyboczeniowej układu poprzecznego hali przemysłowej. Pierwsza kombinacja obciążeń przewiduje tylko obciążenie osiowe słupów.



Rysunek 29. Postać wyboczeniowa konstrukcji odpowiadająca wyboczeniu giętnemu z płaszczyzny układu (wywołanemu obciążeniem osiowym słupa) oraz zestawienie wyników z analizy wyboczeniowej i dla Narzędzia AutoNcr.

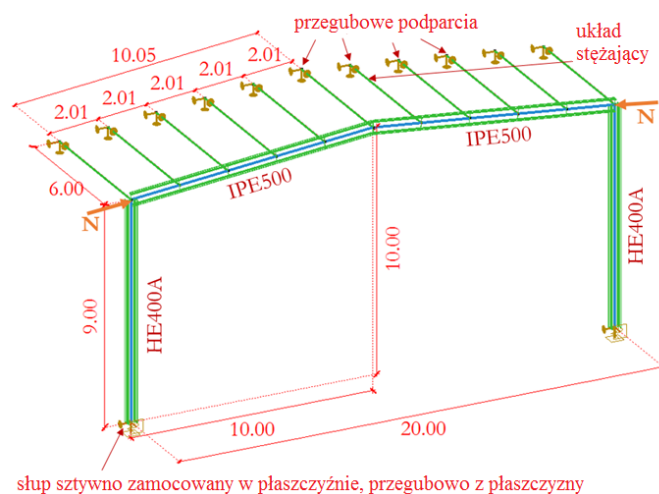


Rysunek 30. Postać wyboczeniowa konstrukcji odpowiadająca wyboczeniu giętnemu w płaszczyźnie ramy (wywołanemu obciążeniem osiowym słupa) oraz zestawienie wyników z analizy wyboczeniowej i dla Narzędzia AutoNcr.

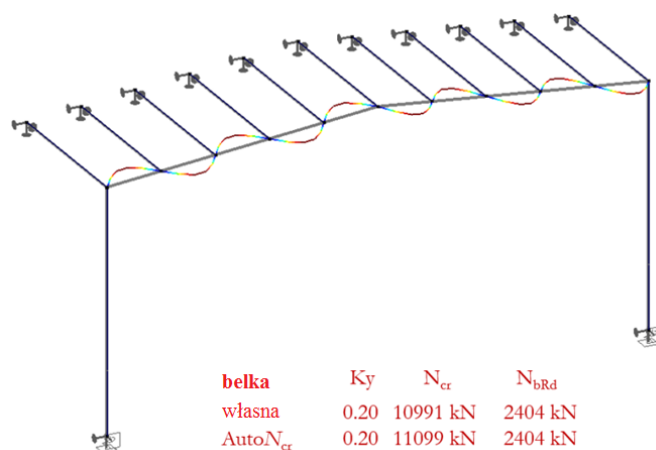
Drugi przypadek pokazany jest na Rysunku 31, a jego wyniki przedstawiono na Rysunku 32 oraz Rysunku 33. Wyboczenie z płaszczyzny belki jest również problemem podstawowym, niemniej jego właściwe przybliżenie wymaga, aby Narzędzie AutoNcr rozpoznawało podparcia boczne zapewnione

przez elementy stężenia. Belka ustawiona jest jako element nieprzechyłowy w swojej lokalnej płaszczyźnie x-y (z płaszczyzny układu). Wyniki pokazane na *Rysunku 32* pokazują, że obliczenia automatyczne zapewniają właściwe parametry wyboczenia dla tego przypadku: długość wyboczeniowa równa się rozstawowi między dwoma elementami stężenia.

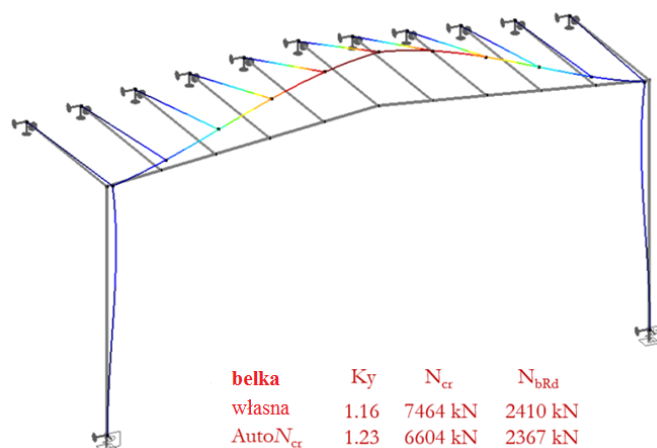
Wyboczenie belki w płaszczyźnie przedstawione jest na *Rysunku 33*. Ponieważ **słupy nie są obciążone siłą osiową, dlatego mogą zapewnić podparcie boczne na końcach belki**. Z tego wynika, że belka rozpatrywana jest, jako element nieprzechyłowy w swojej lokalnej płaszczyźnie x-z (płaszczyzna układu). Podparcia stężeń są pomijane w przypadku wyboczenia w płaszczyźnie układu ramy. Belka w modelu nie jest elementem prostym, natomiast *Narzędzie AutoNcr* do swoich obliczeń zakłada elementy proste. Prowadzi to do niewielkich błędów po stronie bezpiecznej. Błąd z tego wynikający na poziomie 3% dla wartości N_{bRd} jest akceptowalny.



Rysunek 31. Dane wejściowe i model numeryczny analizy wyboczeniowej układu poprzecznego hali przemysłowej. Druga kombinacja obciążeń przewiduje tylko obciążenie poziome przyłożone na wysokości górnego węzła słupa.



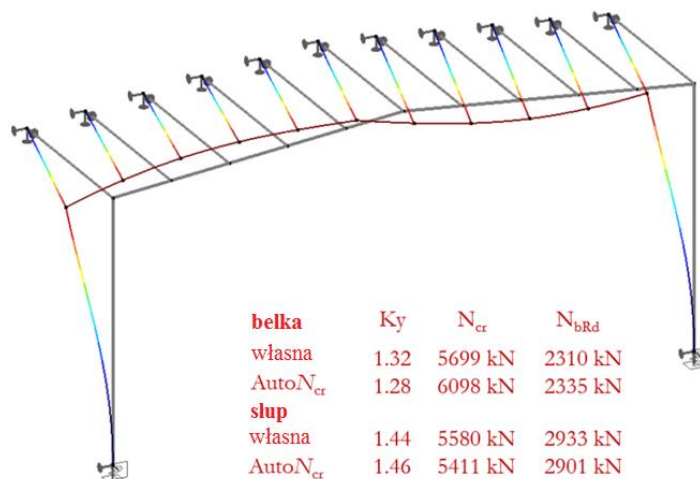
Rysunek 32. Postać wyboczeniowa konstrukcji odpowiadająca wyboczeniu giętnemu z płaszczyzny układu (belka obciążona siłą osiową). Zestawienie wyników analizy wyboczeniowej i za pomocą *Narzędzia AutoNcr*.



Rysunek 33. Postać wyboczenia układu odpowiadająca wyboczeniu w płaszczyźnie jako skutek obciążenia osiowego belki oraz posumowanie analizy wyboczeniowej i automatycznej.

Wyniki analizy wyboczenia z płaszczyzny układu dla trzeciego przypadku są identyczne z poprzednimi dla słupów i belek. Żaden główny element nie jest podparty przez drugi w sposób zapewniający zabezpieczenie przed wyboczeniem z płaszczyzny. Dlatego różne warianty obciążenia nie zmieniają w tym przypadku postaci wyboczenia z płaszczyzny.

Z drugiej strony, na wyboczenie w płaszczyźnie silnie wpływa kombinacja obciążeń osiowych. Postać wyboczeniowa na *Rysunku 34* jest bardzo podobna do postaci na *Rysunku 30*, lecz odpowiadające wartości N_{cr} oraz K_y są mniej korzystne dla przypadku z *Rysunku 34*. Oczywiście słupy powinny być ustawione jako elementy przechyłowe w płaszczyźnie, lecz takie ustawienie dla belki nie jest już tak oczywiste. Właściwe ustawienie zależy od sztywności względnej i wytrzymałości belki i słupa.



Rysunek 34. Postać wyboczenia konstrukcji odpowiadająca wyboczeniu giętnemu w płaszczyźnie dla kombinacji obciążeń wraz z wynikami z analizy wyboczeniowej i automatycznej.

Belka powinna być rozpatrywana, jako element nieprzechyłowy w przypadku, gdy słupy mogą ją podpieierać na poziomie jej obciążenia krytycznego, które prowadzi do wyboczenia giętnego w płaszczyźnie. Dzieje się tak wtedy, gdy belka jest elementem krytycznym i układ ulega zniszczeniu przez przekroczenie odkształceń plastycznych w jednym z przekrojów belki. Często w takich przypadkach siła w słupach N_{Ed} jest dużo mniejsza od jego nośności na wyboczenie giętne.

Dużo częściej belka jest elementem wytrzymałym i dlatego układ konstrukcyjny niszczy się z powodu plastycznych odkształceń w jednym lub dwóch jego słupach. W takich układach wyboczenie w płaszczyźnie prowadzi do znaczących przemieszczeń pionowych węzła belka-słup. Powoduje to powstanie momentów drugiego rzędu w belce, stąd jej wyboczenie giętne powinno zostać zaklasyfikowane jako przechyłowe. Takie ustawienie dla belki znacząco zwiększy jej K_y oraz zmniejszy jej nośność N_{bRd} .

Należy zauważyć, że belki są projektowane zwykle, jako elementy przenoszące rozłożone obciążenia pionowe i odpowiadające im siły poprzeczne i momenty zginające. Dlatego generowane są w nich względnie małe siły osiowe. Wyboczenie słupa w takim przypadku prawie zawsze występuje przed wyboczeniem belki, gdyż siła N_{Ed} w belkach jest mniejsza od siły N_{Ed} w słupach w momencie osiągnięcia przez słup nośności na wyboczenie giętne. Zgodnie z powyższą argumentacją, takie belki powinny być zaklasyfikowane jako przechyłowe (mają odpowiednio małą siłę N_{cr} i duże wartości K_y). Natomiast wynikowa, niska wartość N_{bRd} nie powinna być alarmująca, gdyż siła N_{Ed} w belkach jest mała, a ich wyboczenie giętne w takich przypadkach nie będzie prowadziło do zniszczenia układu. **Jeżeli belka staje się decydującym elementem konstrukcji, jej parametr wyboczenia nie powinien być ustawiony jako przechyłowy. Dlatego z praktycznego punktu widzenia, kiedy uwzględniania jest duża liczba kombinacji obciążeń i użytkownik woli korzystać z jednego ustawienia parametrów wymiarujących dla wszystkich kombinacji zaleca się, aby ustawić belkę, jako nieprzechyłową.** Prowadzi to do konserwatywnych wyników w przypadkach niedecydujących, zapewniając jednocześnie właściwe wyniki w decydujących przypadkach kombinacji obciążeń.

W analizowanym przykładzie układ poprzeczny jest obciążony przez znaczące siły osiowe i belka staje się elementem krytycznym. Uwzględnimy to, przyjmując belkę jako element nieprzechyłowy. Otrzymane wartości parametrów wyboczeniowych z *Narzędzia AutoNcr* (Rysunek 34) są wystarczająco dokładne dla obu elementów układu konstrukcyjnego.

6. PODSUMOWANIE

Niniejszy przewodnik powinien dostarczyć wystarczających informacji użytkownikom programu AxisVM, w celu zapoznania się z *Narzędziem AutoNcr*. Podstawy teoretyczne zamieszczone w Rozdziale 2 oraz 3 wyjaśniają, że narzędzie zostało zaprojektowane do rozwiązywania określonych problemów i nie jest w stanie zapewnić dokładnych wyników dla wszystkich możliwych układów. Jego celem jest zapewnienie wystarczająco dokładnych oszacowań parametrów wyboczenia giętnego dla dużego zakresu układów konstrukcyjnych, które są często wykorzystywane w praktyce inżynierskiej. Twórcy mają nadzieję, że użytkownicy programu AxisVM korzystając z *Narzędzia AutoNcr* będą mogli wykonywać swoje projekty efektywniej i bardziej ekonomicznie. Dążymy do ciągłego doskonalenia tego narzędzia, w oparciu o informacje zwrotne od użytkowników.

Przykłady przedstawione w Rozdziałach 4 oraz 5 tłumaczą mechanizmy działania i wskazują na typowe pułapki w analizie stateczności konstrukcji w ogóle, a także przy korzystaniu z *Narzędzia AutoNcr*. Przykłady pojedynczych elementów pokrywają znaczną część praktycznych problemów, uwzględniając przekroje specjalne i pokazując ograniczenia stosowalności *Narzędzia AutoNcr*. Jest to element naszego zaangażowania na rzecz przejrzystości: preferujemy, aby nasi użytkownicy znali te ograniczenia i byli w stanie wykorzystać nasze narzędzie mądrze. Przykład układu konstrukcyjnego w Rozdziale 5 ilustruje, że narzędzie pozwala na analizowanie średnio skomplikowanych konstrukcji z różnymi schematami obciążeń. Spodziewamy się, że z czasem na podstawie przesłanych opinii, zestaw przykładów będzie się powiększał, aby objąć wszystkie problemy, które napotykają użytkownicy programu.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Chladný E. and Štujberová M., 2013, Frames with unique global and local imperfection in the shape of the elastic buckling mode (Part 1), Stahlbau, 82:8 609-17
2. ECCS Technical Committee 8 - Stability, 2006, Rules for Member Stability in EN 1993-1-1 Background documentation and design guidelines, European Convention for Constructional Steelwork (ECCS)European Committee for Standardization (CEN), 2009a, EN 1993-1-1:2009 Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN
3. European Committee for Standardization (CEN), 2009b, EN 1993-1-5:2009 Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-5: Plated structural elements, CEN